EQUATIONS DE MAXWELL

1. Passage aux relations locales

1.1 Résumé des lois en régime stationnaire

On a vu, pour traduire le comportement des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en RS :

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
flux	$\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Qint}{\varepsilon_0}$ th gauss	$\oiint \vec{B}.\vec{dS} = 0$
circulation	$\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$	$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_e$ th. d'ampère

Ces 4 relations sont les équations de Maxwell (pour l'instant limitées au cas du régime stationnaire) sous forme intégrale (VS locale)

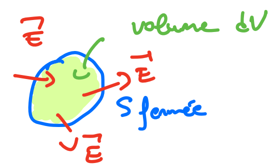
1.2 Opérateur divergence, théorème de green

aussi appelé Ostrogradski

Opérateur divergence : noté div ( )

- champ vectoriel → champ scalaire
- flux sortant par u. de volume au travers d'une surface fermée entourant un volume infinitésimal

$$\phi(\vec{E}/S) = \mathrm{div}(\vec{E})\, dV$$



- en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Théorème de green :

$$\iiint_V \mathrm{div}(\vec{E})\, dV = \oiint_S \vec{E}.\vec{dS}$$

S (fermée) entoure V

illustration : $\phi(\vec{E}/S) = \mathrm{div}(\vec{E})\, dV$ pour dV infinitésimal entouré par S.

On prend pour dV un petit cube de côtés dx, dy, dz

point P de coord. (x, y, z)

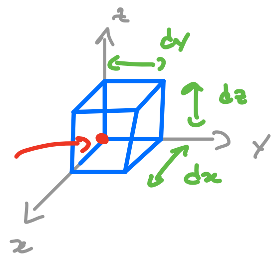
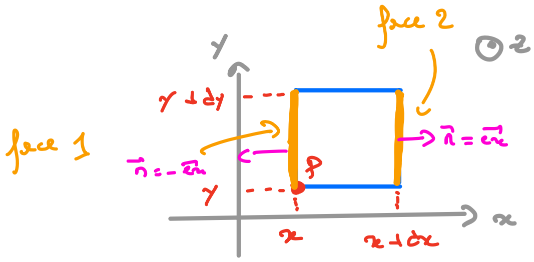
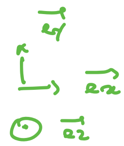


illustration en 2D :





Rem : il serait plus convaincant de placer le point P de coord. (x, y, z) au centre du cube.
Mais le calcul est + pénible, et cela donne le même résultat.

Calcul du flux au travers de S :
→ surface fermée composée des 6 faces du cube

On commence par les faces ① et ② :

$$\phi(\vec{E}/dS_1) = \underbrace{\vec{E}(x, y, z)}_{} \cdot \vec{n}\, dS_1 = \underbrace{\vec{E}(x, y, z) \cdot (-\vec{e_x})}_{-E_x(x, y, z)}\, dy\, dz$$

sur la face S_1, on est en x et y varie entre $y + dy$; z entre z et $z + dz$
⇒ approximation

vecteur unitaire ⊥ à dS_1, sortant

De même, $\phi(\vec{E}/dS_2) = \vec{E}(x + dx, y, z) \cdot \vec{e_x}\, dy\, dz = E_x(x + dx, y, z)\, dy\, dz$

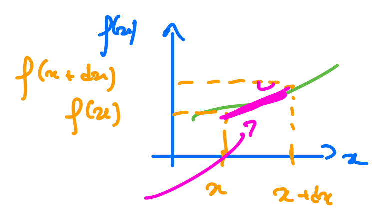
Donc pour l'ensemble des faces ① et ② :

$$\phi(\vec{E}/dS_1) + \phi(\vec{E}/dS_2) = \Big(\underbrace{E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)}_{\frac{\partial E}{\partial x} dx} \Big)\, dy\, dz$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

$f(x + dx) - f(x)$

$\simeq$



pente = nombre dérivé en x = $\dfrac{f(x + dx) - f(x)}{}$ = $f'(x)$

On fait la même chose avec les autres faces :

on obtient $\dfrac{\partial E_y}{\partial y}\, dV + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\, dV$

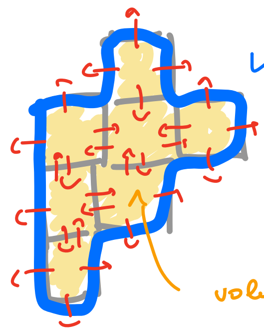
faces $\perp \vec{e_y}$ faces $\perp \vec{e_z}$

da

Au total : $\phi(\vec{E}/S) = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{div(\vec{E})} dV$

on pourrait le noter dS

- illustration du th. de green :



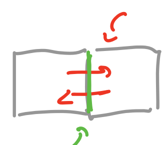
surface S qui entoure le volume V

volume V

le terme $\iiint_V div(\vec{E})\, dV$ revient à sommer sur tous les petits cubes les termes $div(\vec{E})\, dV$. Mais on a vu que $div(\vec{E})\, dV = \underbrace{\phi(\vec{E}/dS)}$

flux de $\vec{E}$ au travers de la surface qui entoure le petit cube

mais les flux au travers de la face commune à 2 cubes voisins se compensent



les 2 flux se compensent

face commune

Il ne reste donc que les flux au travers des surfaces des cubes infinitésimaux qui sont sur la surface S extérieure, donc le flux au travers de S (surface qui entoure V).

Et donc $\iiint_V div(\vec{E})\, dV = \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS}$: th de green.

1.3 opérateur rotationnel, théorème de Stokes

opérateur rotationnel :

noté $\vec{rot}(\ldots)$

curl en anglais

- champ vectoriel → champ vectoriel
- circulation par u. de surface
- en coord. cartésiennes :

$$\vec{rot}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

voir + loin pour la mémorisation

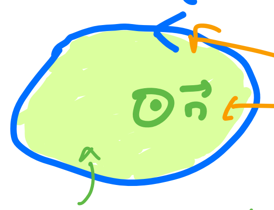
théorème de Stokes : $\iint_S \vec{rot}(\vec{E})\,\vec{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{dl}$

ou Stokes-Ampère ...

la courbe fermée $\mathcal{C}$ entoure la surface S

⚠ attention aux conventions d'orientation : les conventions pour le sens de la circulation et pour le sens du flux sont liées.

$\mathcal{C}$: courbe fermée orientée



cohérence entre les 2 convention (tire-bouchon ...)

surface S entourée par $\mathcal{C}$

orientée par $\vec{n}$

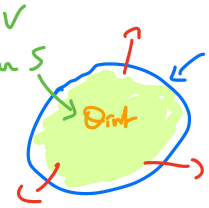
On pourrait faire les mêmes illustrations que pour divergence, mais c'est plus compliqué.

1.4 Equations de Maxwell sous forme locale en RS

$\vec{E}$

volume V entouré par S

S, fermée



- lors avec le flux :

  - th de gauss : $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

  Or, $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} \underset{\text{green}}{=} \iiint_V \mathrm{div}(\vec{E})\,dV$

  D'autre part, $Q_{int} = \iiint_V \rho\,dV$

  D'où $\iiint_V \mathrm{div}(\vec{E})\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\,dV$

  ceci est valable quel que soit le volume V $\Rightarrow$ $\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$

  $\int_I f(x)\,dx = \int_I g(x)\,dx \quad \forall I$

  $\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in I$

  On en déduit l'équation locale :

  $$\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Maxwell-gauss

  eq. de Maxwell locale équivalente au th de Gauss.

- On fait de même avec la propriété $\oiint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$

  Or, $\oiint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \mathrm{div}(\vec{B})\,dV$

  D'où l'équation locale : $\boxed{\mathrm{div}(\vec{B}) = 0}$ Maxwell-thomson - flux

- lois avec la circulation :

$\mathcal{C}$: courbe fermée

surface S entourée par $\mathcal{C}$

- th d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}}_{\text{courant enlacé}}$

Or, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \iint_S \vec{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{dS}$

Stokes

D'où $\iint_S \vec{rot}(\vec{B})\, \vec{dS} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$

On en déduit $\boxed{\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$ Maxwell – Ampère (en RS)

- propriété $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ donne $\boxed{\vec{rot}(\vec{E}) = \vec{0}}$ Maxwell - Faraday (en RS)

⚠ les équations en div restent valables en régime variable

les équations en rot doivent être modifiées en régime variable.

1.5 utilisation pour calculer des champs $\vec{E}$ / $\vec{B}$.

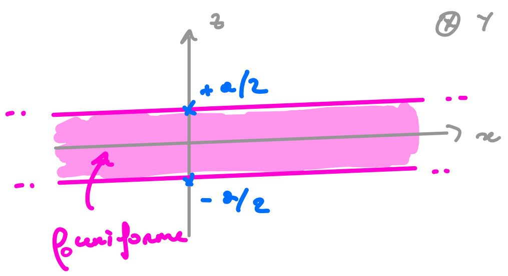
→ approche + calculatoire (moins géométrique) que les formes intégrales (th gauss et th ampère)

→ ne convient pas pour des distributions surfaciques / linéiques (il faut des charges décrites par ρ ou des courants décrits par $\vec{j}$)

→ il faut avoir les expressions des opérateurs div et rot dans le système de coord. utilisé (si pb en cylindriques / sphériques si ce n'est pas donné ...)

Quelques exemples :

- couche infinie chargée (uniformément en volume)



Symétries + invariances (utile même si pas nécessaire) : $\vec{E} = E_z(z)\, \vec{e_z}$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{E}) = \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$ $\quad (E_x = 0$ et $E_y = 0)$

On utilise $\operatorname{div}(\vec{E}) = \rho / \varepsilon_0$

→ à l'intérieur : $-a/2 \leq z \leq a/2$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_z = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z + c^{te}$$

On prend $c^{te} = 0$, ainsi $E_z = 0$ pour $z = 0$

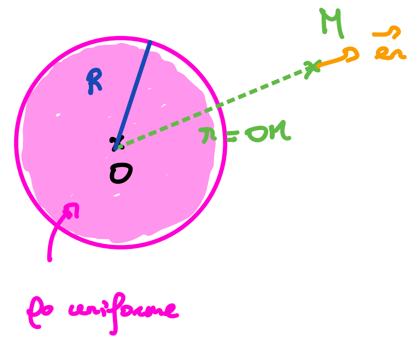
$$\Rightarrow \boxed{E_z = \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0}}$$

→ à l'extérieur : $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = c^{te}$

Donc, par continuité en $z = +/- a/2$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_z = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} & \text{si } z \geq a/2 \\ E_z = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} & \text{si } z \leq -a/2 \end{array}}$$

• sphère uniformément chargée en volume



sym + invariances : $\vec{E}(M) = E_r(r)\, \vec{e_r}$

on remarque que $\vec{E}(O) = \vec{0}$

point O

En coord. sphériques, $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$

Donc ici, $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}$

→ à l'intérieur : $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donne $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{\rho_0 r^2}{\varepsilon_0} \xRightarrow{\text{on intègre}} r^2 E_r = \frac{\rho_0 r^3}{3\varepsilon_0} + c^{te}$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon} + \frac{c^{te}}{r^2}$$

il faut prendre $c^{te} = 0$ pour avoir $E_r(r=0) = 0$

finalement, $\boxed{E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$

→ à l'extérieur : $\operatorname{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$ donne $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = 0$

$\rho = 0$ à l'extérieur

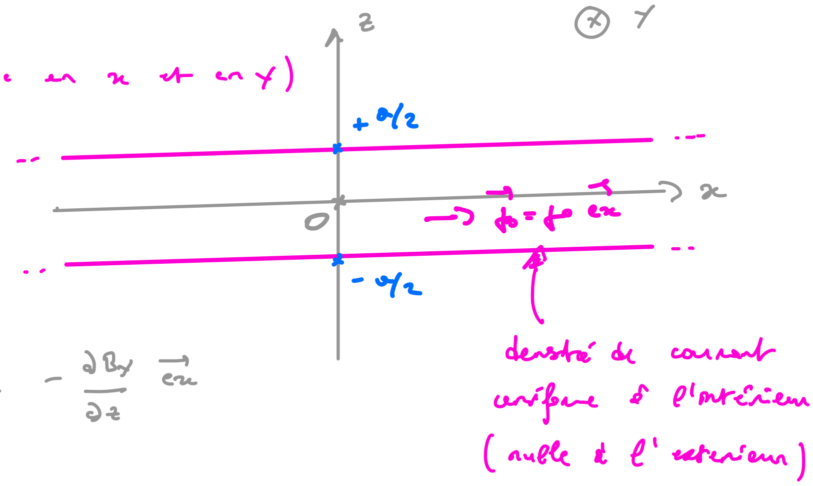
$$\Rightarrow r^2 E_r = c^{te} \Rightarrow E_r = \frac{c^{te}}{r^2}$$

On détermine c^{st} par continuité en $r = R$: $\frac{c^{st}}{R^2} = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}$

$\Rightarrow c^{st} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}$

et donc $\boxed{E_r = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

- nappe plane de courants (infinie en x et en y)



Symétries + invariances :

$\vec{B}(M) = B_y(z)\,\vec{e_y}$

Or, $\vec{rot}(\vec{B}) = \left(\cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x}$

$+ \left(\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial x}}\right)\vec{e_y}$

$+ \left(\underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x}}_{=0} - \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial y}}\right)\vec{e_z}$

$= 0$ car B_y ne dépend pas de x

→ à l'intérieur : $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

donc $-\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = \mu_0 j_0 \vec{e_x}$

$\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 j_0 \Rightarrow$ (on intègre) $B_y = -\mu_0 j_0 z + c^{st}$

et $\vec{B}(z=0) = \vec{0}$, $c^{st} = 0$

$\Rightarrow \boxed{B_y = -\mu_0 j_0 z}$

→ à l'extérieur : $\vec{j} = \vec{0}$, donc

$\vec{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$,

donc $\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow B_y = c^{st}$

On détermine la constante par continuité en $z = +/- a/2$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } z \geq a/2 : & B_y = -\mu_0 j_0 a/2 \\ \text{si } z \leq a/2 : & B_y = \mu_0 j_0 a/2 \end{array}}$$

1.6 Opérateur Nabla, analyse vectorielle

Opérateur Nabla : $\vec{\nabla}(\ldots) = \partial/\partial x(\ldots)\,\vec{e_x} + \partial/\partial y(\ldots)\,\vec{e_y} + \partial/\partial z(\ldots)\,\vec{e_z} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix}$

On a déjà vu 3 opérateurs vectoriels :

- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$

  On peut écrire $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f)}$

- divergence : $\text{div}(\vec{E}) = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

  On peut écrire $\boxed{\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}}$

  en effet, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

- rotationnel : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}}$

  ce qui permet de retrouver facilement l'expression (en cartésiennes !)

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

- laplacien (scalaire) : $\boxed{\Delta(f) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$

  scalaire → scalaire

  détail : $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \text{div}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}\right)$ =

Avec la notation Nabla : $\Delta(f) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}(f)) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})(f)$

$= \vec{\nabla}^2(f)$

On peut également définir le laplacien vectoriel, qui s'applique à un champ vectoriel (et donne un champ vectoriel) :

$$\boxed{\vec{\Delta}(\vec{E}) = \Delta(E_x)\vec{e_x} + \Delta(E_y)\vec{e_y} + \Delta(E_z)\vec{e_z}}$$

On applique le laplacien scalaire à chaque composante du champ vectoriel

Cela signifie, si on développe, qu'il y a 9 termes dans $\vec{\Delta}(\vec{E})$:

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)\vec{e_x}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}$$

⚠ tout ça ne marche qu'en cartésiennes, et est horriblement compliqué en cylindriques / sphériques

Quelques relations utiles :

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = 0$ quel que soit f.

avec Nabla :
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}(f) = \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla})}_{=\vec{0}}(f)$$

- $div(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = 0$ quel que soit $\vec{E}$

démo : $div(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{E}}_{\perp \vec{\nabla}}}_{=0}$

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{E})) - \vec{\Delta}(\vec{E})$

démo : préliminaire : double produit vectoriel $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$
$$= (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$
$$= \underbrace{\vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{div(\vec{E})}}_{\overrightarrow{grad}(div(\vec{E}))} - \underbrace{\vec{\nabla}^2(\vec{E})}_{\vec{\Delta}(\vec{E})}$$

1.8 Equation de Poisson et Laplace

On est en RS, donc on peut écrire $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

On a vu ceci en électrostatique, c'est vrai en RS, mais pas en régime variable.

Si on combine avec l'équation de Max-Gauss :

$div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$, on obtient $div(-\overrightarrow{grad}(V)) = \rho/\varepsilon_0$,

soit $div(\overrightarrow{grad}(V)) = -\rho/\varepsilon_0$

$\Delta(V)$

D'où $\boxed{\Delta(V) = -\rho/\varepsilon}$ équation de Poisson

Dans le cas où $\rho = 0$ (pas de charges ...), $\boxed{\Delta(V) = 0}$ équation de Laplace

C'est une manière (très calculatoire) d'obtenir V (puis $\vec{E}$ ...) à partir de la distribution de charges.

$\Rightarrow$ simulations numériques.

2. Passage au régime variable

2.1 Loi de Faraday

On a vu en électrostatique $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$. Mais c'est faux en régime variable, cette équation doit être modifiée (complétée).

En fait, on connaît la loi intégrale associée (et en régime variable) :

S entourée par $\mathcal{C}$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{où} \quad e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Donc $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}\right)$

Or, $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{E})\, \vec{dS}$ et $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}\right) = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$

Stokes

D'où $\displaystyle\iint_S \underline{\overrightarrow{rot}(\vec{E})}\, \vec{dS} = \iint_S \underline{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}\, \vec{dS}$

les 2 fonctions doivent être égales partout

et donc $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ équation de Maxwell – Faraday.

2.2 Conservation de la charge

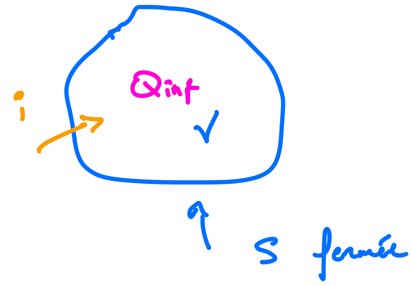
$\hookrightarrow$ la charge électrique ne peut être ni créée ni détruite

La charge électrique contenue dans un certain volume V entouré par une surface fermée S ne peut varier que si des charges traversent S

Variation de Q_{int} = quantité de charge qui traverse S (en entrant)

soit : $\boxed{\dfrac{dQ_{int}}{dt} = \underbrace{i}_{\text{courant (entrant) qui traverse } S} = -\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}}$

⚠ signe " $-$ " car $\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}$ est par convention le flux sortant.



En RS, on avait $\dfrac{dQ_{int}}{dt} = 0$ et donc $\oiint \vec{j}\cdot\vec{dS} = 0$ ⟹ loi des noeuds

⟶ vu dans le chapitre sur champ $\vec{B}$

En régime variable, Q_{int} peut varier.

On peut écrire $Q_{int} = \iiint_V \rho \, dV$ ⟹ $\dfrac{dQ_{int}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho \, dV\right) = \iiint_V \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dV$

On a donc $\iiint_V \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oiint \vec{j}\cdot\vec{dS}$ forme intégrale de conservat° de la charge

On passe à la forme locale en utilisant le th. de green :

$$\underbrace{\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \mathrm{div}(\vec{j})\, dV}_{\text{th. green}}$$

D'où $\iiint_V \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iiint_V -\mathrm{div}(\vec{j})\, dV$

Comme c'est valable pour tout volume V, cela implique :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\vec{j})}$$

forme locale de conservation de la charge

On peut alors se rendre compte que l'équation $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ est incomplète, car incompatible avec la conservat° de la charge :

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ donne $\underline{\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}))} = \mu_0 \, \mathrm{div}(\vec{j})$

⟹ car $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\cdots}))$ est toujours nul et donc $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow div(\vec{j}) = 0$ ce qui est vrai en RS, mais faux en variable.

L'idée de Maxwell est de rajouter un terme :

$$\boxed{\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

équation Maxwell Ampère

le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, homogène à un courant volumique (à $\vec{j}$) est appelé courant de déplacement

($\vec{j}$ étant appelé courant de conduction)

Vérifions que cette équation redonne bien la conservation de la charge :

$$\underbrace{div(\vec{rot}(\vec{B}))}_{=0} = \mu_0 \, div(\vec{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \underbrace{div\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}_{= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(div \vec{E}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\rho/\varepsilon_0)}$$

$div \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Max. gauss)

D'où $0 = \mu_0 \, div(\vec{j}) + \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t}(\rho/\cancel{\varepsilon_0})$

$\Rightarrow div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ on retrouve bien la conservation de la charge !

2.3 Equations de Maxwell complètes

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
div	$div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$ Max - gauss	$div(\vec{B}) = 0$ Max. flux / thomson
$\vec{rot}$	$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Max. Faraday	$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Max. Ampère

Si on ajoute à ceci la force de Lorentz subie par une charge q dans des champs $\vec{E}$ / $\vec{B}$: $\boxed{\vec{f} = q\vec{E} + q\,\vec{v} \wedge \vec{B}}$ on a résumé l'ensemble de l'électromagnétisme !

2.4 Couplage $\vec{E}$ / $\vec{B}$

Les équations $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ traduisent un couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

variation de $\vec{B}$ $\Rightarrow$ champ $\vec{E}$
variation de $\vec{E}$ $\Rightarrow$ champ $\vec{B}$

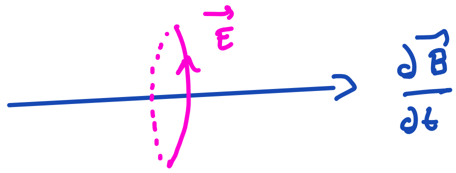
Ainsi, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ variables s'entretiennent mutuellement : c'est le mécanisme de propagation des ondes électromagnétiques, qui ne nécessitent aucun support matériel !

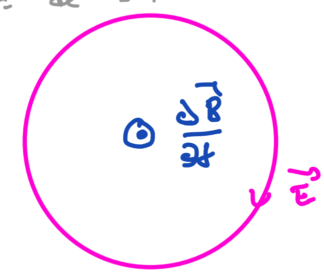
Plus précisément :

- une variation de $\vec{B}$ crée un champ $\vec{E}$ induit (φ d'induction ...),
  c'est l'équation $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \dfrac{d}{dt}\left(\iint \vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$

  le champ $\vec{E}$ créé " s'enroule " autour de la variat. de $\vec{B}$:

$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

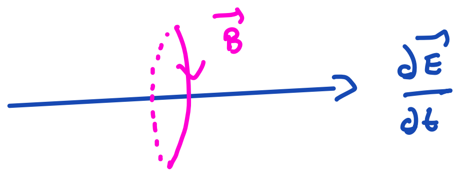


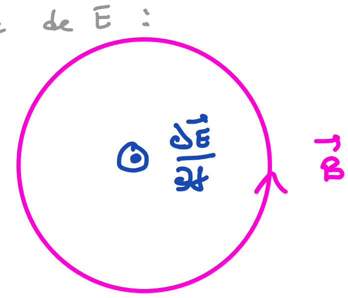


- une variation de $\vec{E}$ crée un champ $\vec{B}$ (on peut aussi le qualifier d'induit)
  c'est l'équation $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint \vec{j}\, d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{d}{dt}\left(\iint \vec{E}\, d\vec{S}\right)}_{\text{forme intégrale complète du th. d'Ampère}}$

  le champ $\vec{B}$ créé " s'enroule " autour de la variat. de $\vec{E}$:

$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$





La prise en compte simultanée des 2 phénomènes ($\vec{B}$ variable $\Rightarrow \vec{E}$ et $\vec{E}$ variable $\Rightarrow \vec{B}$) conduit à l'équation de propagation des ondes em :

On se place dans le vide, pas de charges ni de courants : $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases}$

eq. Max :

$div(\vec{E}) = 0$ $\qquad$ $div(\vec{B}) = 0$

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Pour tenir compte des 2 φ simultanément, on calcule $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{E}))$:

- d'un côté, $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{E})) = \vec{grad}(\underbrace{div(\vec{E})}_{=0}) - \vec{\Delta}(\vec{E})$

formule établie au 1.6

- d'autre part, avec les équations de Maxwell :

$$\vec{rot}(\underbrace{\vec{rot}(\vec{E})}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}) = \vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{rot}(\vec{B})}_{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On en déduit l'éq. de propagat° pour $\vec{E}$ dans le vide :

$$\boxed{\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

quasi-stationnaire
$\Updownarrow$
basse fréquence
$\Updownarrow$
lentement variable

2.5 Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

Il s'agit de faire des approximations basse fréquence dans les équations de Maxwell :

$$div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon \qquad div(\vec{B}) = 0$$

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

termes dépendant du temps.

La démarche généralement utilisée est de garder $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

et de faire l'approximat° BF dans $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

basse fréquence

Cette approximation revient à négliger $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant $\vec{j}$: $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$

ARQS (approximat° BF) : on néglige le courant de déplacement (par rapport au courant de conduction)

Dans l'ARQS, Max.-Ampère redevient, comme en RS,

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

conséquence : on retrouve le th. d'Ampère
$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 I_e$:

dans l'ARQS, on calcule

les champs B comme en RS.

Ordre de grandeur pour l'ARQS :

par ex, on est dans un métal, donc $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

donc $\underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ << $\vec{j}$ donne $\varepsilon_0 \omega \vec{E} << \gamma \vec{E}$ => $\varepsilon_0 \omega << \gamma$

en régime sinusoïdal,

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \omega \vec{E}$

par ex, pour le cuivre,

$\gamma \simeq 6 \cdot 10^7$ SI $(S.m^{-1})$

$\omega << \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = \frac{6 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{-12}}$

$\simeq 0,7 \cdot 10^{19}$

$\simeq 7 \cdot 10^{18}\ s^{-1}$

$f = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 10^{18}$ Hz

Donc, pour le cuivre, l'approximation BF, nécessite $f << \underbrace{10^{18}\ \text{Hz}}_{\text{rayons X}}$

Dans les circuits électriques, en gl f ne dépasse pas le GHz, il y a beaucoup de marge !

Rem : même en BF, le seul endroit où il faut garder le terme $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est l'espace entre les armatures d'un condensateur : pas de $\vec{j}$, c'est le courant de déplacement qui "permet au courant de traverser le condensateur".

3. Aspects énergétiques

3.1 Densités volumiques d'énergie em → em = électromagnétique

$$\boxed{w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$$

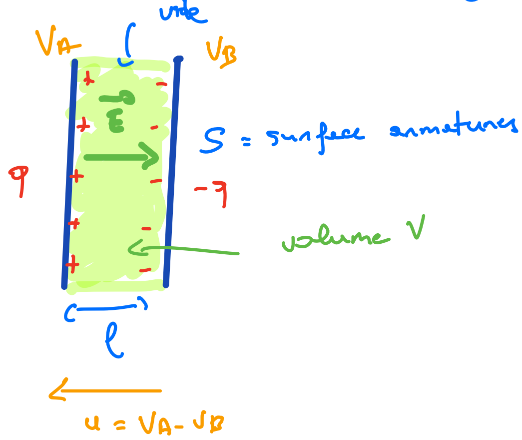
énergie "électrique" (reliée au champ $\vec{E}$) par u. de volume

$$\boxed{w_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

énergie "magnétique" (reliée à $\vec{B}$) par u. de volume

Partout dans l'espace où il y a des champs $\vec{E}$ / $\vec{B}$, il y a une certaine énergie em (penser à la propagat° d'ondes em)

- Illustration de $w_{el} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$: condensateur plan → voir ds le cours d'électrostatique



champ $\vec{E}$: $E = \dfrac{u}{\ell}$ (approximat° plan ⇔ pas d'effets de bord)

capacité : $q = Cu$ avec $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\ell}$

Énergie contenue ds le condensateur :

$$E_{cond} = \frac{1}{2} C u^2$$

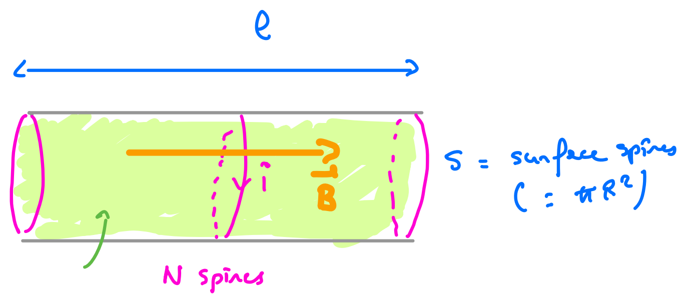
volume du condensateur : $V = S\ell$

$$w_{el} = \frac{E_{cond}}{V} = \frac{1/2\, C u^2}{S\ell} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{S} E^2 \cancel{\ell^2}}{2 \cancel{\ell} . \cancel{S} \cancel{\ell}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

→ w_{el} uniforme

(sinon $E_{cond} = \iiint_V w_{el}\, dV$)

- illustration de $w_{mag} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$:



volume $V = S\ell$

champ B : $B = \mu_0 \dfrac{N}{\ell} i$

inductance L : $\phi_{tt} = NBS$ et $\phi_{tt} = Li$

$\Rightarrow N \mu_0 \dfrac{N}{\ell} i S = Li$

$\Rightarrow L = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$

Énergie stockée : $E_{bob} = \dfrac{1}{2} L i^2$

$$w_{mag} = \frac{E_{bob}}{V} = \frac{1/2\, L i^2}{S\ell}$$

$i = \dfrac{B\ell}{\mu_0 N}$

$$= \frac{\cancel{\mu_0} \cancel{N^2} \cancel{S}\, B^2 \cancel{\ell^2}}{2\, \cancel{S} \cancel{\ell} . \cancel{\ell}\, \mu_0^{\cancel{2}} \cancel{N^2}}$$

$$= \frac{B^2}{2\mu_0}$$

D'une manière générale, l'énergie em contenue dans un volume V s'écrit :

$$\boxed{\begin{gathered} E_{em} = (w_{el} + w_{mag}) \quad \text{si } w_{el} \text{ et } w_{mag} \text{ uniformes} \\ E_{m} = \iiint_V (w_{el} + w_{mag})\, dV \end{gathered}}$$

3.2 Conservation de l'énergie

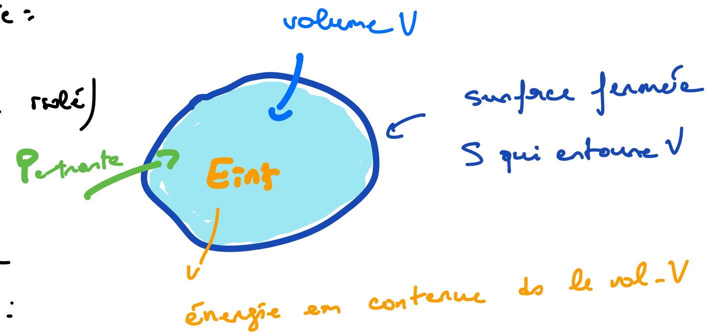
principe très général en physique : l'énergie est toujours conservée (pas de création / destruction)

à condition de tenir compte de toutes les formes d'énergie !

En l'absence d'absorption (qui convertit l'énergie em en énergie thermique via l'effet Joule), l'énergie em est conservée :

→ si aucune énergie ne traverse S (système isolé)

alors $E_{int} = c^{ste}$



→ si il y a des échanges (de l'énergie traverse S) :

$$\frac{dE_{int}}{dt} = P_{entrante} = -P_{sortante}$$

On peut écrire la puissance qui traverse une surface S comme le flux du vecteur de Poynting (noté $\vec{\pi}$) :

$$\boxed{P_{/S} = \iint_S \vec{\pi}\cdot\vec{dS}}$$

puissance em qui traverse S

On remarque que, dimensionnellement,

π est une puissance par u. de surface :

$$\underbrace{P}_{W} = \underbrace{\pi}_{W.m^{-2}} \cdot \underbrace{S}_{m^2}$$

La direction et le sens de $\vec{\pi}$ indiquent direction (sens de déplacement de l'énergie em.

On peut ainsi écrire $P_{sortante} = \oiint_S \vec{\pi}\cdot\vec{dS}$

D'où $$\frac{dE_{int}}{dt} = -\oiint \vec{\pi}\cdot\vec{dS}$$

th. green

On, $E_{int} = \iiint_V (w_{el} + w_{mag})\, dV$ et $\oiint \vec{\pi}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\pi})\, dV$

D'où $$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(w_{el} + w_{mag})\, dV = -\iiint_V \operatorname{div}(\vec{\pi})\, dV$$

Et donc $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(w_{el} + w_{mag}) = -\operatorname{div}(\vec{\pi})}$$

équation locale de conservation de l'énergie em

Rem : $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = -\operatorname{div}(\vec{j})$$

3. 3 Vecteur de Poynting $\vec{\pi}$

On a introduit $\vec{\pi}$ via le fait que $P_{/S} = \iint_S \vec{\pi} \cdot \vec{dS}$:

La puissance em qui traverse une surface S est égale au flux de $\vec{\pi}$ au travers de cette surface

$\vec{\pi}$ représente (quantitativement) les déplacements d'énergie em.

On peut par ailleurs exprimer $\vec{\pi}$ à partir des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

aspects dimensionnels :

$E = \frac{u}{\ell}$ $\quad B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$

donc $\frac{E \cdot B}{\mu_0} = \frac{u \cancel{\mu_0} N i}{\ell \cdot \ell \cancel{\mu_0}} = \frac{\underbrace{N}_{\phi} \overbrace{(u\, i)}^{W}}{\underbrace{\ell^2}_{m^2}}$

donc $W \cdot m^{-2}$, ce qui est la dimension de $\vec{\pi}$.

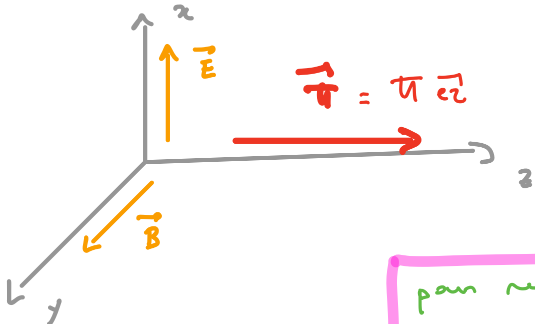
On justifie cette expression sur un cas simple :

hypothèses :

$\vec{E} = E_x \vec{e_x}$

$\vec{B} = B_y \vec{e_y}$

E_x et B_y ne dépendent que de z et t.



pour retrouver l'express. de $\vec{rot}$.

$$\vec{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$\partial/\partial x \quad E_x$

$\partial/\partial y \quad E_y$

On utilise les équations de Maxwell :

- $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ or, $\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e_y}$

Donc $\boxed{-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}}$ (1) (projeté sur $\vec{e_y}$)

- $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, or $\vec{rot}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e_x}$

Donc $\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}}$ (2) (projeté / $\vec{e_x}$).

On repart de $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{(E_x \vec{e_x}) \wedge (B_y \vec{e_y})}{\mu_0} = \underbrace{\frac{E_x B_y}{\mu_0}}_{= \pi_z} \vec{e_z}$

D'où $\text{div}(\vec{\pi}) = \cancel{\frac{\partial \pi_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \pi_y}{\partial y}} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (E_x B_y)$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} B_y + E_x \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)$$

On remplace en utilisant (1) et (2) :

$$f' \cdot f = \left(\frac{f^2}{2}\right)'$$

- $\frac{\partial E_x}{\partial z} B_y \underset{(1)}{=} -\frac{\partial B_y}{\partial t} B_y = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B_y^2}{2}\right)$

- $E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} \underset{(2)}{=} E_x\left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_x^2}{2}\right)$

Ainsi, $\operatorname{div}(\vec{\pi}) = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B_y^2}{2}\right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_x^2}{2}\right)\right)$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{B_y^2}{2\mu_0}}_{w_{mag}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{E_x^2}{2}}_{w_{el}}\right)\right)$$

car $\vec{E} = E_x \vec{e_x}$, $E^2 = E_x^2$
et -- $B^2 = B_y^2$

On voit ainsi que l'expression $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est compatible avec la conservation locale de l'énergie en $\operatorname{div}(\vec{\pi}) = -\frac{\partial}{\partial}(w_{el} + w_{mag})$

3.4 Effet Joule

On cherche à exprimer la puissance em (par u. de volume, c'est une grandeur locale) associée à l'effet Joule.

On reprend le modèle de Drude et la modélisation sommaire d'un métal $\begin{cases} \text{ions}(+) \\ e^- \text{ libres.} \end{cases}$

On note n^* la densité d'e^- libres (en m^{-3})

Il y a dissipation d'énergie (énergie em $\rightarrow$ énergie thermique)

via la mise en mvt des e^- libres par le champ $\vec{E}$ et la force de Drude ("frottement fluide")

On considère un e^- libre : il subit la force de Lorentz $\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance associée à cette force est : $p = \vec{f}\cdot\vec{v} = -e\,(\vec{E} + \underbrace{\vec{v}\wedge\vec{B}}_{\perp\, \vec{v}})\cdot\vec{v} = -e\vec{E}\cdot\vec{v}$

(∵ la force magnétique ne travaille pas).

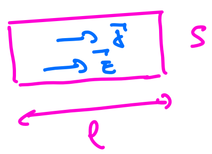
Donc $p = -e\,\vec{E}\cdot\vec{v}$ pour un e^- libre.

Par u. de volume, il y a n^* e^- libre, donc la puissance est : $P_{vol} = n^* . p = \underbrace{(n^* e\, \vec{v})}_{\vec{j}}\cdot\vec{E}$

Donc $\boxed{P_{vol} = \vec{j}\cdot\vec{E}}$ puissance em par u. de volume absorbée par le métal via l'effet Joule.

Comme $\vec{j} = \underbrace{\gamma}_{\text{conductivité}}\vec{E}$, on peut re-écrire $P_{vol} = \gamma E^2 = \dfrac{j^2}{\gamma}$

On peut calculer la puissance dissipée dans un morceau de conducteur :



$P_{Joule} = P_{vol} . V = \dfrac{j^2 S\ell}{\gamma} = \dfrac{i^2 S\ell}{\gamma . S^2}$ car $j = i/S$

$= \underbrace{\dfrac{\ell}{\gamma S}}_{R}\, i^2 = R i^2$

On peut reprendre le bilan d'énergie em avec cette absorbtion :

$$\frac{d E_{int}}{dt} = -P_{sortant} - P_{Joule}$$

$$\Rightarrow \iiint \frac{\partial}{\partial t}(w_{el} + w_{mag}) = -\underbrace{\oiint \vec{\pi}\cdot\vec{dS}}_{\iiint_V \mathrm{div}(\vec{\pi})\, dV} - \iiint_V P_{vol}\, dV$$

D'où
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(w_{el} + w_{mag}) = -\,\mathrm{div}(\vec{\pi}) - \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{E}}_{P_{vol}}}$$

bilan local d'énergie em avec absorbtion.