Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 15 : 13 au 17 janvier 2025

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
  On pourra par exemple demander de citer tous les développements en série entière des fonctions usuelles avec leurs rayons de convergence.
- ☐ On fixe $z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application $t \mapsto e^{tz}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange associée à f sur l'intervalle $[0,1]$. Montrer que $z \mapsto e^z$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et donner son développement.
- ☐ Montrer que $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, donner son développement, puis exprimer *(vu en TD)* $\ln(2)$ sous la forme d'une série.
- ☐ Calculer le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
- ☐ Démontrer le théorème de continuité des intégrales à paramètre (sous l'hypothèse de domination sur A tout entier).
- ☐ Montrer que $\Gamma : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t$ est continue sur $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
  On pourra appliquer l'hypothèse de domination sur les ensembles $\{z \in \mathbb{C},\ a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b\}$, pour tous $0 < a < b$.

Chapitre 16 : Séries entières

On reprend les parties I et II du programme précédent. On ajoute la partie III.

I Rayon et disque de convergence

I.1 Disque ouvert de convergence

I.2 Déterminer le rayon de convergence

I.3 Somme de deux séries entières

I.4 Produit de Cauchy de deux séries entières

II Propriétés de la somme d'une série entière

II.1 Continuité

II.2 Limite au bord de l'intervalle ouvert de convergence

II.3 Dérivation terme à terme

II.4 Unicité des coefficients

III Fonctions développables en série entière

III.1 Définition et contre-exemples

- fonction développable en série entière (DSE) ; cas de la variable complexe, cas de la variable réelle. Une fonction f est DSE sur le disque ouvert $D(0,R)$, où R est strictement positif, s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R tel que : $\forall z \in D(0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
- une fonction DSE n'est pas nécessairement égale à son développement en série entière sur l'intégralité de son domaine de définition.
- si une fonction f (de la variable réelle) est DSE sur $]-R,R[$, où $R > 0$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et est égale à sa série de Taylor sur $]-R,R[$. Contre-exemple : la fonction valeur absolue n'est donc pas DSE.
- unicité, en cas d'existence, du développement en série entière.
- il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ non développables en série entière.
- une combinaison linéaire, un produit de fonctions DSE est encore DSE.
- toute dérivée successive, toute primitive d'une fonction DSE est DSE.

III.2 Fonctions usuelles (variable complexe ou réelle)

- toute fonction polynomiale est DSE sur $\mathbb{C}$ et le développement est donné par la formule de Taylor polynôme.
- la fonction $z \mapsto e^z$ est DSE sur $\mathbb{C}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est DSE sur $D(0,1)$ et $\forall z \in D(0,1)$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
  Exemple de fonction de type $z \mapsto \frac{1}{1 \pm z^k}$.

III.3 Fonctions usuelles (variable réelle)

- la fonction cos est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.
- la fonction sin est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
- la fonction ch est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$.
- la fonction sh est DSE sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
- la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est DSE sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.
  De plus, $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$.
- la fonction Arctan est DSE sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.
- utilisation du théorème d'Abel radial pour obtenir une formule au bord de l'intervalle ouvert de convergence.

- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $]-1,1[$ et $\forall x \in\ ]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
- méthode de l'équation différentielle pour déterminer un développement en série entière.

Chapitre 17 : Intégrales à paramètre

I Continuité

I.1 Théorème de continuité

- Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que
  - pour $t \in I$ fixé, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
  - pour $x \in A$ fixé, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
  - *hypothèse de domination* : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que
  $$\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

  Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur A.
- On peut remplacer l'hypothèse de domination par la suivante :
  pour tout compact K de A, il existe une fonction φ_K intégrable sur I telle que
  $$\forall x \in K,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t).$$

I.2 Exemples

II Dérivabilité

II.1 Théorèmes

- énoncé du théorème dans sa version $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$. Voici la version $\mathcal{C}^k$:

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- pour $t \in I$ fixé, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour $x \in A$ fixé et pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour $x \in A$ fixé, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- *hypothèse de domination* : pour tout segment K de A, il existe une fonction φ_K intégrable sur I telle que

$$\forall x \in K,\ \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_K(t).$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in A,\ g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

II.2 Exemples

- étude de la fonction Γ.

À suivre la semaine prochaine :

Espaces préhilbertiens réels