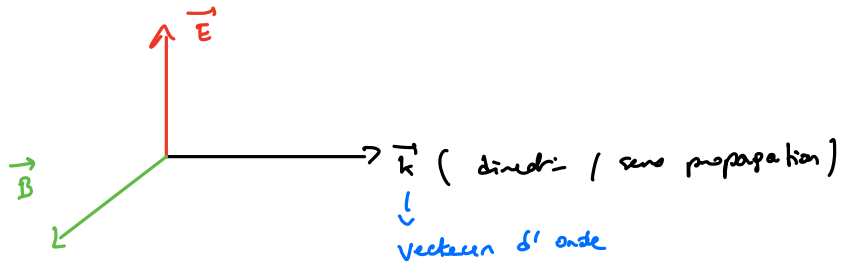


ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

1. Propagation dans le vide

1.1 Domaines des ondes em

- les ondes em sont les seules qui n'ont pas besoin d'un support matériel (en général, une onde est une vibration dans un milieu matériel qui se propage de proche en proche. ex: vagues sur la mer).
- elles consistent en des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ variables qui s'entraînent mutuellement via les équations $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.
- ce sont des ondes transversales: vibrations ($\vec{E}$ et $\vec{B}$) $\perp$ à la direction de propagation

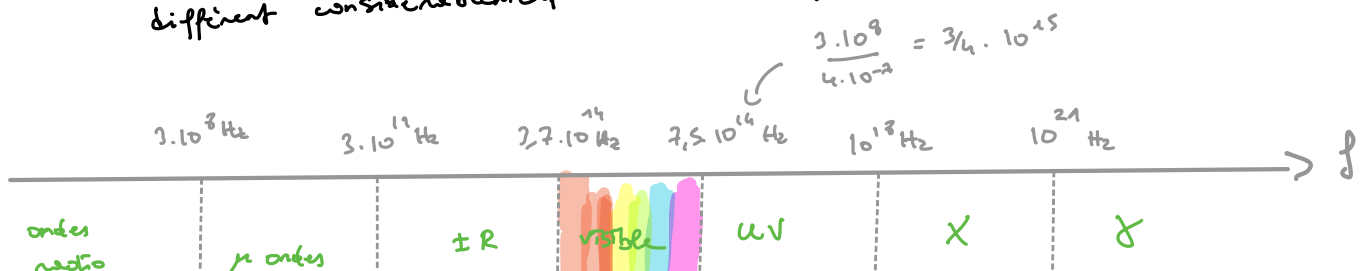


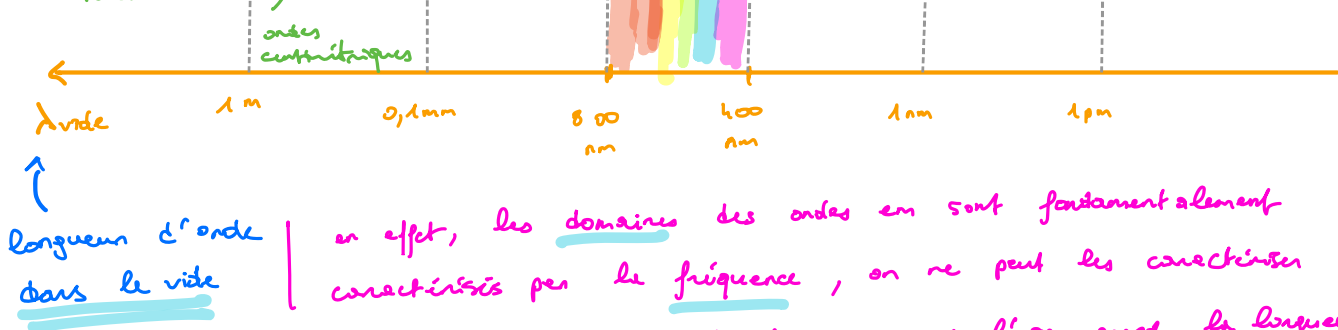
- Dans le vide, les ondes em se propagent à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Les ondes em peuvent aussi se propager dans des milieux matériels:

→ diélectriques (isolants): l'effet essentiel est que la vitesse est plus petite: $v = \frac{c}{n}$ → vitesse de la onde
 (pour des milieux transparents, sinon l'onde est absorbée...)
 n → indice de réfraction
 c → vitesse de la onde

→ conducteurs (métaux, plasma): cf chapitre suivant

- Les propriétés caractéristiques (effet sur la matière...) des ondes em diffèrent considérablement selon leur fréquence:





↑
longueur d'onde
dans le vide

en effet, les domaines des ondes en sont fondamentalement caractérisés par la fréquence, on ne peut les caractériser par des longueurs d'onde que si l'on prend la longueur dans le vide, via la relation $\lambda_{\text{vide}} = \frac{c}{f}$

Si on change de milieu, f reste la même mais λ change!
milieu d'indice n , $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c/n}{f} = \frac{1}{n} \frac{c}{f} = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}$

1.2 Equation d'onde → déjà vu chapitre précédent

eq. de Maxwell dans le vide, sans charges ni courants
 $\hookrightarrow \rho = 0 \quad \hookrightarrow \vec{J} = \vec{0}$

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En appliquant 2 fois le rotationnel à $\vec{E}$ ou $\vec{B}$, et en utilisant la formule $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$, on obtient:

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = -\Delta(\vec{E}) \quad \text{avec la formule ci-dessus, et } \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{Max. Faraday} \quad \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\vec{B})) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Max. Ampère

Donc $\Delta(\vec{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

même chose pour $\vec{B}$: $\Delta(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

Equation de d'Alembert

On remarque que la dimension de $\mu_0 \epsilon_0$ est $\frac{s^2}{m^2}$ et on pose donc $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$
(on obtient en g.l. $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$) $\Rightarrow 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \leftarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \rightarrow 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
 $\hookrightarrow 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

l'"électromagnétisme" contient "la vitesse de la lumière dans le vide" (l'"électromagnétisme" est fondamentalement relativiste)

Rem sur l'analyse dimensionnelle:

$$\underbrace{\Delta(\vec{E})}_{\frac{(V \cdot m^{-1})}{m^2}} = \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{\frac{s^2}{m^2}} \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}_{\frac{(V \cdot m^{-1})}{s^2}} \Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \text{ en } s^2 \cdot m^{-2}$$

1.3 Onde plane monochromatique

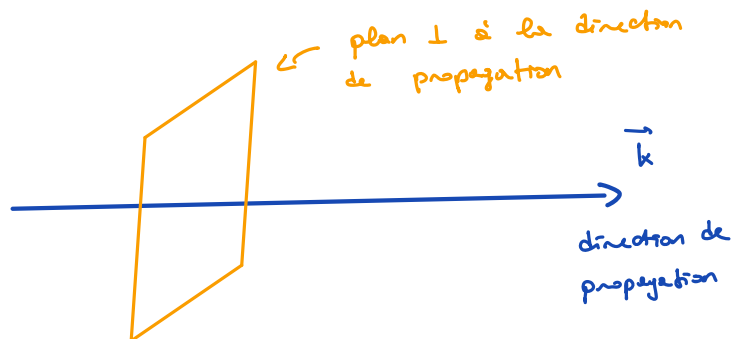
→ souvent noté OPPH ou OPPM
 onde plane progressive harmonique (= monochromatique)

C'est la forme d'onde la plus simple qui vérifie l'équation de d'Alembert.
 On étudie spécialement les ondes planes monochromatiques (comme les signaux sinusoïdaux en électricité) parce que on peut ensuite construire n'importe quelle onde en les sommant (paquets d'onde, c'est le même principe que les séries de Fourier).

- Onde monochromatique : caractérisée par une fréquence bien définie (contient une seule fréquence)
 c'est la même chose que pour un signal sinusoïdal
 sinusoïdal $\Leftrightarrow$ harmonique $\Leftrightarrow$ monochromatique
 monochromatique $\Leftrightarrow$ une seule fréquence $\Leftrightarrow$ 1 seule couleur.

- onde plane :

les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont partout les mêmes dans un plan $\perp$ à la direction de propagation

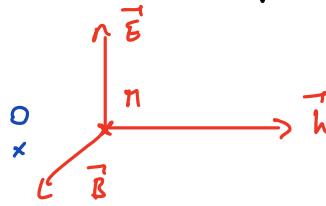


→ si $\vec{k} = k \vec{e}_z$, donc propagé selon l'axe (Oz) ,
 $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indépendants de x et y .

Rem : quand on ajoute "progressive" c'est par opposition à onde stationnaire.

Une onde plane monochromatique s'écrit, de la façon la + générale possible:

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi_y) \vec{e}_y + E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi_z) \vec{e}_z$$



Le plus souvent, la direction de propagation est l'un des 3 axes (le + souvent (Oz)) et c'est déjà plus simple:

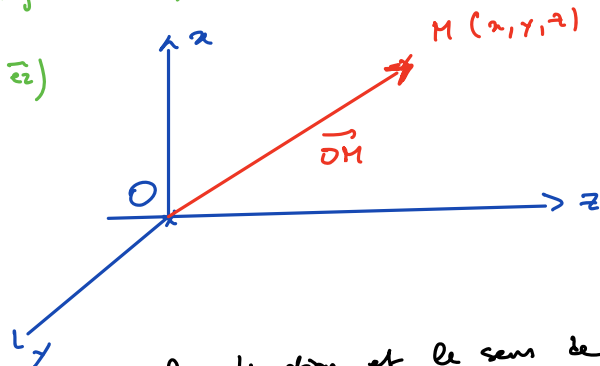
$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \vec{e}_y$$

Onde plane monochromatique, avec direct. de propagation (Oz) (donc $\vec{k} = k \vec{e}_z$).

On a simplifié quoi ?

→ onde transversale, donc si propagation (Oz) , $\vec{E} \perp \vec{e}_z \Rightarrow E_z = 0$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{OM} &= (k \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \\ &= kz \end{aligned}$$



- $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, il donne la direction et le sens de propagation de l'onde et sa norme k est la "pulsation spatiale" ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

Rem : pour être précis, écrivons $\vec{k} = k_z \vec{e}_z$,

ainsi $\vec{k} = k \vec{e}_z$ si $k_z > 0$ (propagation $z \uparrow$)
et $\vec{k} = -k \vec{e}_z$ si $k_z < 0$ (propagation $z \downarrow$)

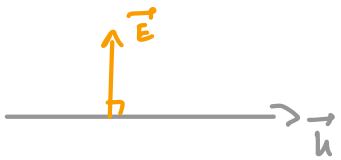
Rem : on décrit toujours à priori une onde par champ $\vec{E}$, on peut ensuite déduire $\vec{B}$ de $\vec{E}$.

1.4 Polarisation

Une onde em est transverse, il y a donc une notion de polarisation : direction

$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$ (vecteur de $\vec{E}$)

du champ $\vec{E}$ (et $\vec{B}$, mais on privilégie $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se déduit de $\vec{E}$)



Pour discuter la polarisation, on prend une onde plane monochromatique, propagée vers les $z \uparrow$. Ce qui conduit à la forme de $\vec{E}$:

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \vec{e}_y$$

amplitudes
phases

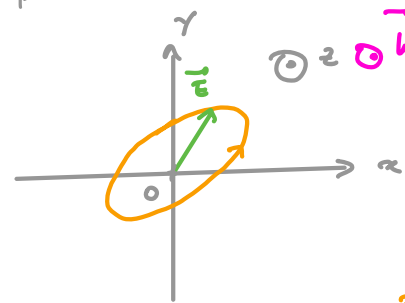
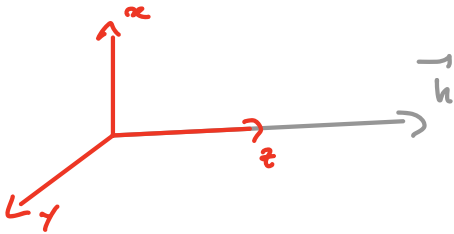
Rem : avec $k > 0$,

$\cos(\omega t - kz) \Rightarrow$ propagée $z \uparrow$

$\cos(\omega t + kz) \Rightarrow$ propagée $z \downarrow$

L'état de polarisation dépend de E_{0x} , E_{0y} , ϕ_x et ϕ_y

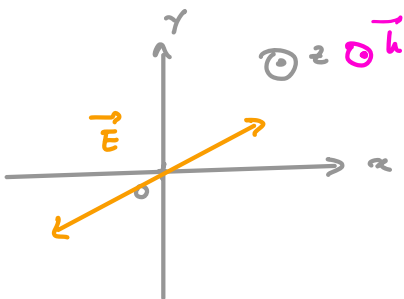
- cas le + général ("rien de spécial") : polarisation elliptique



en une période ($T = \frac{2\pi}{\omega}$),

$\vec{E}$ décrit une ellipse

- Polarisation rectiligne : $\vec{E}$ garde toujours la même direction



Pour avoir une polarisation rectiligne, il faut :

$$\phi_y = \phi_x \text{ (à } \pi \text{)}.$$

$$\rightarrow \text{si } \phi_y = \phi_x$$

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{e}_y$$

$$= (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

direction de polarisation

$\rightarrow$ de même, si $\phi_y = \phi_x + \pi$:

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_x + \pi) \vec{e}_y$$

- $\cos(\omega t - kz + \phi_x)$

$$= (\vec{E}_0 \vec{e}_x - E_0 \vec{e}_y) \cos(\omega t - kz + \phi_0)$$

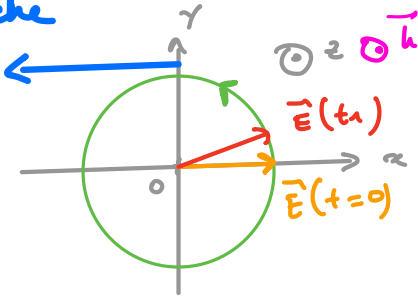
directe de polarisation

- polarisation circulaire : il faut $\begin{cases} E_{0x} = E_{0y} = E_0 \\ \phi_x \text{ et } \phi_y \text{ en quadrature (déphasage } \pi/2) \end{cases}$

Cela conduit à 2 possibilités : Dans le 2 cas, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle.

$$\rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

gauche

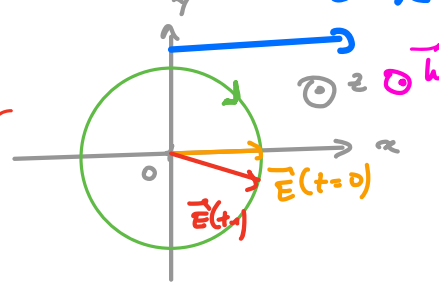


pol. circulaire gauche

ou considère
un instant t_1
" légèrement
supérieur
à $t_0 = 0$ "
($t_1 \ll T$)

$$\rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

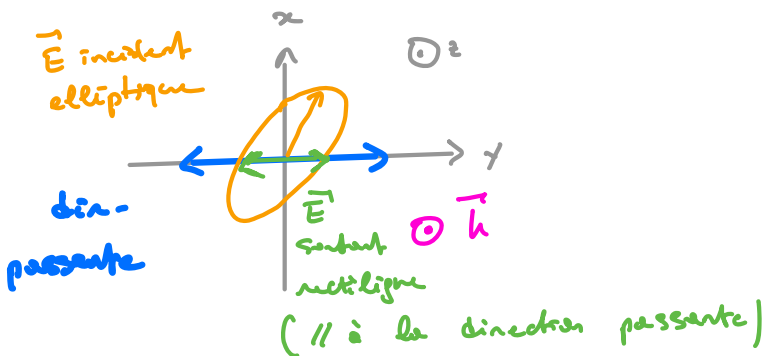
droite



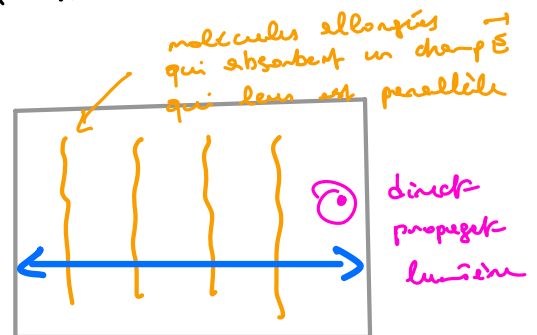
pol. circulaire droite

1.5 Polariseurs

polariseur = matériau transparent qui ne laisse passer la lumière que selon une certaine direction de polarisation. Après avoir traversé un polariseur, la lumière est toujours polarisée rectilignement.

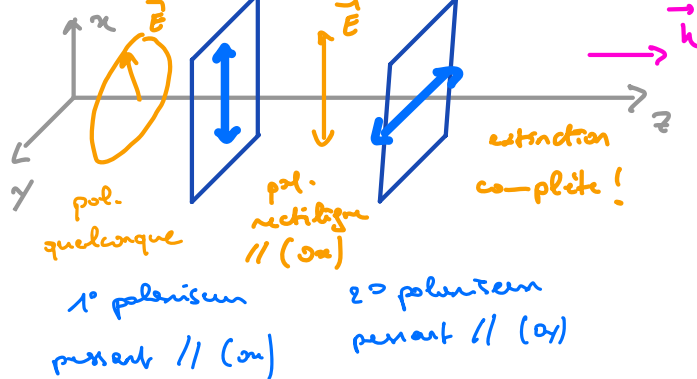


direction
passante



morceau de matériau
polariseur

- cas de 2 polariseurs croisés :



- Applications :
- intensité lumineuse à la sortie de 2 polariseurs décalés d'un angle $\alpha \Rightarrow$ loi de Malus | vu en TP.
 - écrans LCD $\rightarrow$ voir TP.

1.6 Notation complexe

Reprenons l'écriture la + générale d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH} + \phi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH} + \phi_y) \vec{e}_y + E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH} + \phi_z) \vec{e}_z$$

On utilise la notation complexe $\vec{E}$ associée au champ réel $\vec{E}$ en "remplaçant les $\cos(\dots)$ par des $e^{i(\dots)}$ " (comme en électrostatique)

$$\text{Donc } \vec{E} = E_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH} + \phi_x)} \vec{e}_x + E_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH} + \phi_y)} \vec{e}_y + E_{0z} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH} + \phi_z)} \vec{e}_z$$

on factorise par $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH})}$

$$\text{Donc } \vec{E} = \left(\underbrace{E_{0x} e^{i\phi_x}}_{\vec{E}_{0x}} \vec{e}_x + \underbrace{E_{0y} e^{i\phi_y}}_{\vec{E}_{0y}} \vec{e}_y + \underbrace{E_{0z} e^{i\phi_z}}_{\vec{E}_{0z}} \vec{e}_z \right) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH})}$$

$\vec{E}_0 \leftarrow$ terme constant.

Le $\vec{E}_0$ "cache les choses" !

Soit, en condensant ainsi les notations :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OH})}$$

Avec les notations complexes, les opérateurs vectoriels (pour les ondes planes monochromatiques) prennent une forme simple:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= i\omega \vec{E} \\ \text{div}(\vec{E}) &= -i\vec{k} \cdot \vec{E} \\ \text{rot}(\vec{E}) &= -i\vec{k} \wedge \vec{E} \\ \Delta(\vec{E}) &= -k^2 \vec{E}\end{aligned}$$

expressions simplifiées des opérateurs pour des ondes planes monochromatiques

la justification n'est pas difficile, mais calculatoire -

1.7 Structure d'une onde en plane monochromatique

→ on applique ces nouveaux outils aux eq. Maxwell / propagat-

$$\begin{aligned}\bullet \text{div}(\vec{E}) &= 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k} \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}\bullet \text{div}(\vec{E}) &= 0 \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0\end{aligned}} \right\} \text{justifie le caractère transverse de l'onde en}$$

$$\bullet \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{donne : } i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

d'où

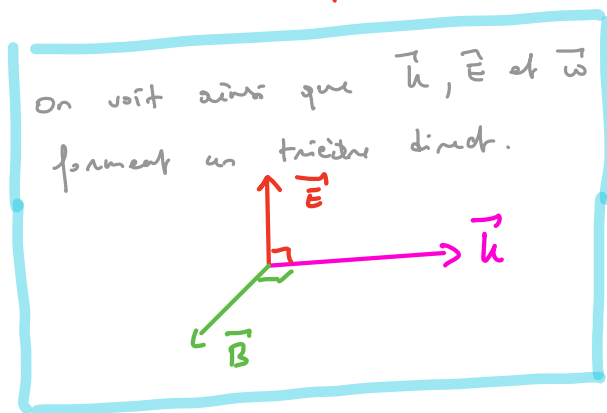
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

relation de structure, fonctionne également avec les notations réelles.

c'est toujours ainsi que l'on calcule $\vec{B}$ à partir de $\vec{E}$ (onde en plane)

→ si pas onde plane, on "revient" à

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



On peut aussi exploiter l'aspect dimensionnel :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow B = \frac{k E}{\omega} \quad \text{On, } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

$\xrightarrow{m^{-1}}$ $\xrightarrow{s^{-1}}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$$

champs $\vec{E}$ $\vec{B}$ $\rightarrow$ vitesse $v \cdot m^{-1}$ $m \cdot s^{-1}$

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = \rho_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donne essentiellement les mêmes informations

(on obtient $\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$)

- équation de propagation : $\Delta(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

donne $-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} (\omega)^2 \vec{E}$

et donc $k^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \Rightarrow$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

relation de dispersion

pour les ondes planes dans le vide.

On voit ainsi que $k = \frac{\omega}{c}$

$\swarrow$ m^{-1} $\nwarrow$ s^{-1}

la relation de dispersion est toujours utile dans tous les phénomènes ondulatoires.

1.8 Retour sur la double périodicité spatiale et temporelle

$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k z) \vec{e}_x$

$\downarrow$ amplitude
 $\uparrow$ direction de propagation (z)
 $\rightarrow$ polarisation rectiligne selon (ox)

le signe indique propagation vers les z ↑
(en admettant que $k > 0$)

Les variables temps et espace sont couplées (dans le $\cos(\omega t - k z)$)

ce qui indique une onde qui se propage (progressive) (par opposition à une onde stationnaire)

Double périodicité :

- temporelle : A $z = z_0$ fixé, $\vec{E} = E_0 \underbrace{\cos(\omega t - k z_0)}_{\text{terme de phase}} \vec{e}_x \Rightarrow$ signal temporel ne dépend que de t

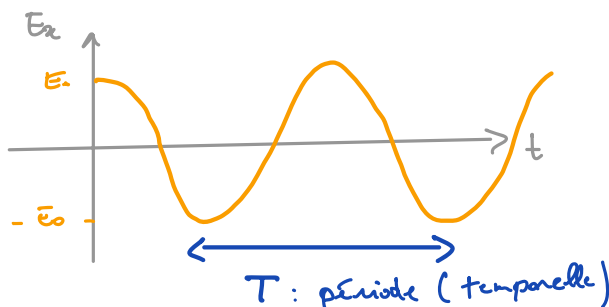


illustration : on étudie le mouvement (de haut en bas) d'un objet flottant sur l'eau lors du passage des vagues.

forme de phase

• spatiale : A $t = t_0$ fixé, $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t_0 - k z) \vec{e}_z \Rightarrow$ signal spatial
ne dépend que de z

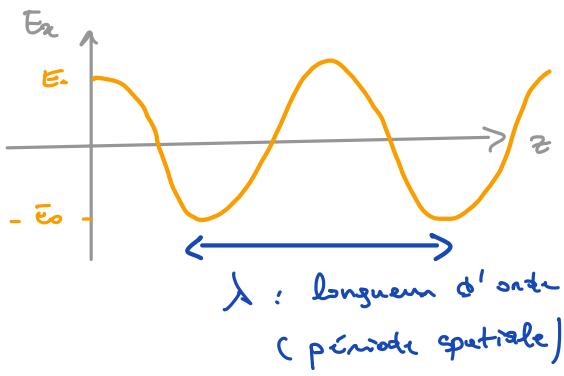


illustration : on prend une photo des vagues ...

Résumé des différentes grandeurs spatiales et temporelles de l'onde :

	spatiale	temporelle
période	λ : longueur d'onde (m)	T : période (s)
fréquence	σ : nombre d'onde (m^{-1})	f : fréquence ($Hz = s^{-1}$)
pulsation	k : vecteur d'onde ($rad \cdot m^{-1} = m^{-1}$)	ω : pulsation ($rad \cdot s^{-1} = s^{-1}$)

$k = 2\pi \sigma$ $\omega = 2\pi f$

$\sigma = 1/\lambda$ $f = 1/T$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

↓

le + souvent, on retient $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\lambda = v \cdot T$
↑
vitesse de propagation,
attention si
 $v = \frac{c}{n} \dots$

$\lambda = c T$

$\sigma = \frac{1}{\lambda} f$

$k = \frac{\omega}{c}$

$k = \frac{\omega}{c}$

souvent utile

relatif de dispersion

1.9 Aspects énergétiques

Le déplacement d'énergie associé à l'onde est donné par le vecteur de Poynting :

$\vec{\pi}$ donne la direction / sens de déplacement de l'énergie.

$\vec{\pi}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires (et de le même sens)

$\pi = ||\vec{\pi}||$ est la puissance par u. de surface transportée par l'onde.

(Rappel : $P = \iint_S \vec{h} \cdot \vec{ds}$)
 ↑
 puissance em
 qui traverse surface S

- Calcul du vecteur de Poynting associé à une onde plane monochromatique :

$$\vec{h} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \quad (\text{def. de } \vec{h})$$

Or, pour une onde plane / monochromatique, $\vec{B} = \frac{\vec{h} \wedge \vec{E}}{\omega}$

D' où $\vec{h} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{E} \wedge (\vec{h} \wedge \vec{E})$

Rappel : double produit vectoriel :
 $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

$$= \frac{1}{\mu\omega} \left((\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{h} - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{h})}_{=0 \text{ car } \vec{E} \perp \vec{h}} \vec{E} \right)$$

D' où $\vec{h} = \frac{1}{\mu\omega} E^2 \vec{h}$: on voit que $\vec{h}$ et $\vec{h}$ colinéaires (même sens)

Or, $\vec{h} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ ($\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}$: vecteur unitaire direct / sens de propagation)

D' où $\vec{h} = \frac{1}{\mu\omega} E^2 \frac{\omega}{c} \vec{u}$ et $\frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c$

Et donc $\boxed{\vec{h} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}}$

L' énergie transportée par l' onde $\vec{h}$
 (puissance par u. de surface)
 est proportionnelle à E^2 .

- On peut relier Poynting aux densités d' énergie :

$w_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ et $w_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$, or pour une onde en plane monochromatique
 du vide, $B = \frac{E}{c}$

donc $w_{mag} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2}$
 $= \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

(par ex, on le retrouve avec $\vec{B} = \frac{\vec{h} \wedge \vec{E}}{\omega}$
 $\Rightarrow B = \frac{k E}{\omega} = \frac{\omega E}{c \omega} = \frac{E}{c}$)

Ainsi $w_{el} = w_{mag}$ et $w_{el} + w_{mag} = 2 w_{el}$ pour une onde ...

$w = w_{el} + w_{mag} = \epsilon_0 E^2$

On avait $\vec{T} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}$

d'où $\vec{T} = w c \vec{u}$

puissance par
u. de surface

densité volumique
d'énergie em

vitesse de propagation de l'onde

• Valeurs moyennes :

On s'intéresse très souvent à la valeur moyenne de $\|\vec{T}\|$,

qui est donc l'énergie moyenne par u. de surface.

On l'appelle, particulièrement en optique, intensité lumineuse ou éclairement.

$I = \langle \|\vec{T}\| \rangle$

très utile en optique ondulatoire.

On reprend $\vec{T} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u} \Rightarrow \|\vec{T}\| = \epsilon_0 c E^2$

On, $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$ (par exemple...)

$\Rightarrow E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$

Et $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$ donc $\langle E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$

moyenne temporelle
sur une période

Ainsi, $I = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$

relation très utile en pratique !

Applications :

• lumière arrivant du soleil sur la terre :

$I \approx 1 \text{ kW/m}^2 \Rightarrow E_0 \approx 300 \text{ V.m}^{-1}$

• laser de TP : 10W sur une surface de 1mm²

$\Rightarrow I = \frac{P}{S} = 10^7 \text{ W.m}^{-2}$

$\Rightarrow E_0 \approx 9 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$

2. Réflexion sur un conducteur parfait

2.1 Conducteur parfait

Approximation du comportement d'un milieu conducteur (présence d' e^- libres)
qui revient à poser $\sigma \rightarrow \infty$ (conductivité infinie).

conséquences essentielles : pas de champ $\vec{E}$ ni de $\vec{B}$ variable dans le conducteur.

Plus en détail :

- $\underline{j = \sigma E}$ donc il faut $\underline{E = 0}$ si $\sigma = \infty$ pour ne pas avoir $\underline{j = \infty}$.
loi d'ohm locale
courants électriques infinis $\Rightarrow$ pas acceptable.

- $\text{div}(\vec{E}) = \rho / \epsilon_0 \Rightarrow \underline{\rho = 0}$ *charge volumique nulle.*
(les éventuelles charges en excès dans le conducteur sont localisées en surface)

- $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{B_{\text{variable}} = 0}$ *il peut y avoir un champ $\vec{B}$ constant (mais cela ne peut pas correspondre à des ondes en)*

- $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} (+ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$
donc si $\vec{B} = \vec{0}$, $\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \underline{\text{pas de } \vec{j}_{\text{variable}}}$

Résumé :

conducteur parfait

σ infinie

$\vec{E} = \vec{0}$

$\rho = 0$

$\vec{B}_{\text{variable}} = \vec{0}$

$\vec{j}_{\text{variable}} = \vec{0}$

il ne peut y avoir des champs $\vec{B}$ et courants que constants.

charges en surface.

2.2 Relations de passage

Contexte : surface qui sépare 2 milieux (ex : vide, conducteur, ...)

avec éventuellement des charges / courants en surface

$\Rightarrow$ possibilités de discontinuité de $\vec{E}$ / $\vec{B}$ de part et d'autre de la surface.

Les relations de passage donnent le lien entre $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$; $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ en faisant intervenir (éventuellement) G et $\vec{fS}$

change
surfaceique

courant
surfaceique

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{2\perp} = \vec{B}_{1\perp}$$

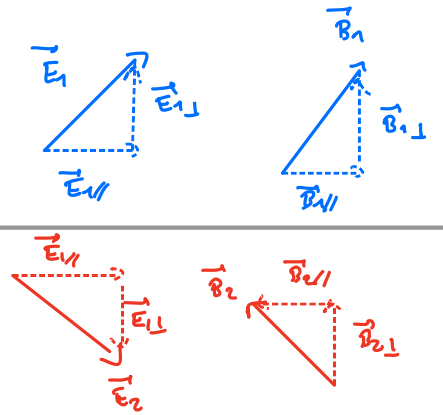
continuité de
la composante
normale de $\vec{B}$

milieu ①

surface de
séparation

milieu ②

vecteur unitaire
normal à la surface,
de ① vers ②



$$\text{div}(\vec{E}) = \rho / \epsilon$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{G}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{2\perp} = \vec{E}_{1\perp} \text{ si } G = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{2||} = \vec{E}_{1||} : \text{continuité de la composante tangentielle de } \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}) = \mu_0 \vec{f} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{fS}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{2||} = \vec{B}_{1||} \text{ si } \vec{fS} = \vec{0}$$

2.3 Onde réfléchie

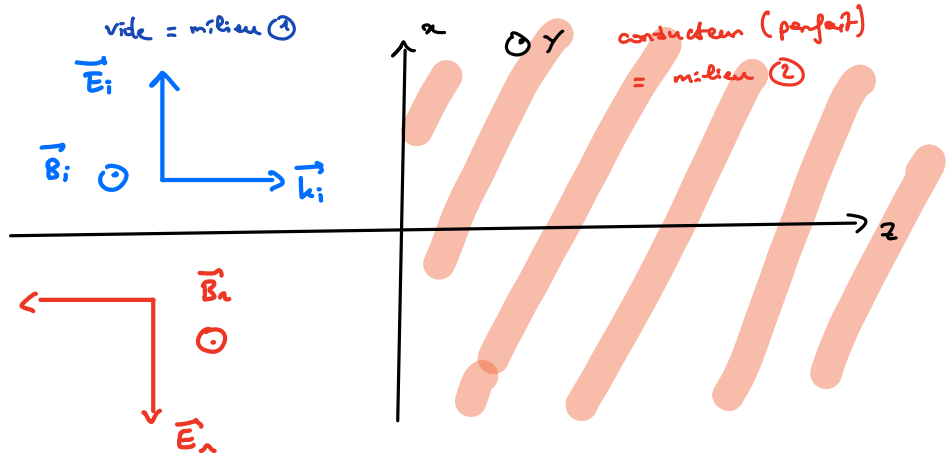
modèle infini en x et y .

$z < 0$: vide

$z > 0$: conducteur

On considère une onde incidente
qui se dirige vers le conducteur.

Onde plane, monochromatique, polarisée $\vec{e}_x$.



$$\vec{k}_i = k \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - k z)$$

$$\vec{B}_i = B_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - k z)$$

$$\left(\text{car } \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k E_0 \cos(\omega t - k z)}{\omega} \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x}{1} \right)$$

$$= \left(\frac{E_0}{c} \right) \cos(\omega t - k z) \vec{e}_y = B_0$$

La question est maintenant de déterminer le champ réfléchi:

$$\vec{k}_r = -k \vec{e}_z$$

Pour déterminer $\vec{E}_r$, on écrit que $\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//}$ (continuité de $\vec{E}$ tangentielle, relation de passage)

$\vec{E}$ dans le milieu (1),
juste à gauche
de la surface

$\vec{E}$ dans le milieu (2)

On, $\vec{E}_1 = \vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0)$ et $\vec{E}_2 = \vec{0}$ car $\vec{E}$ nul dans un conducteur parfait.

juste à gauche
de la surface

$$\Rightarrow \vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{0}$$

On en déduit $\vec{E}_r(z=0) = -\vec{E}_i(z=0)$ et donc $\vec{E}_r(z=0) = -E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t)$

D'où $\vec{E}_r = -E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t + kz)$

même vecteur d'onde ($k = \frac{\omega}{c}$)

indique la propagation vers les $z \downarrow$

compatible avec

$$\vec{E}_r(z=0) = -E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t)$$

même
polarisation
que $\vec{E}_i$

même fréquence
que $\vec{E}_i$

Enfin, $\vec{B}_r = B_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$

car $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = (-k \vec{e}_z) \wedge (-E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t + kz))$
 $= \left(\frac{k E_0}{\omega} \right) \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$
 $\frac{E_0}{c} = B_0$

Rem: On peut définir un coefficient de réflexion (en amplitude) pour $\vec{E}$:

$$r = \frac{E_r(z=0)}{E_i(z=0)} = \frac{-E_0 \cos(\omega t)}{E_0 \cos(\omega t)} = -1$$

la valeur absolue ($= 1$) traduit une réflexion totale

le signe $-$ traduit un déphasage de π lors de la réflexion

Rem: $\vec{B}_1(z=0) = \vec{B}_i(z=0) + \vec{B}_r(z=0)$
 $= B_0 \vec{e}_y \cos(\omega t) + B_0 \vec{e}_y \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \vec{B}_1(z=0) = 2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ c'est $\neq \vec{0}$ alors que $\vec{B}_2(z=0) = \vec{0}$
 $\rightarrow \vec{B}$ variable nul dans le conducteur

Donc discontinuité de $\vec{B}_{//}$ à l'interface

$\Rightarrow$ courant de surface (via relation de passage).

2.4 Onde stationnaire

Considérons, dans le milieu ① (vide)
l'onde totale, superposition des ondes
incidente et réfléchie :

$$\vec{E}_n = \vec{E}_i + \vec{E}_r$$

$$= E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz) + (-E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t + kz))$$

$$= E_0 \vec{e}_x (\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz))$$

onde incidente



onde réfléchie



onde stationnaire

même amplitude
⇒ pour les 2
ondes
incidente
et réfléchie

réflexion totale
sur cette surface

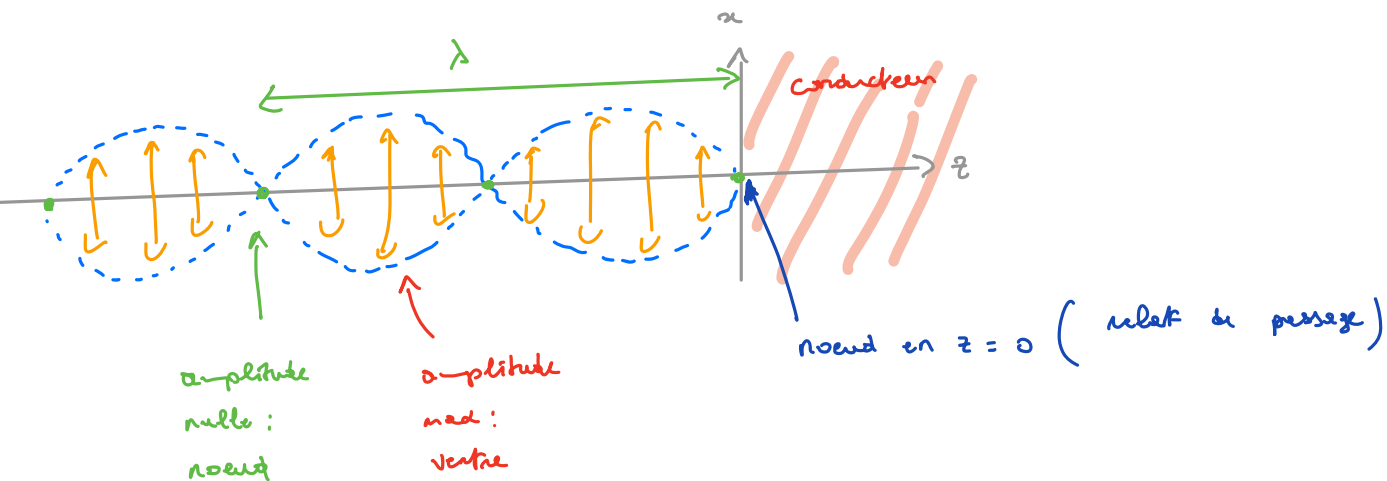
$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

D'où $\vec{E}_n = 2 E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_x$

c'est une onde stationnaire : découplage des variables temps et espace
 $\downarrow$ $\downarrow$
 t z

On voit que $2 E_0 \sin(kz)$ est
l'amplitude de la vibration en z

(alors que dans l'onde progressive
elles sont couplées : $\cos(\omega t \pm kz)$)



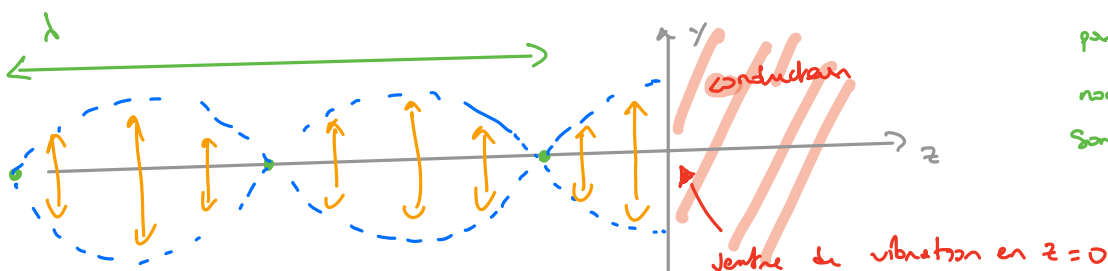
Même calcul pour $\vec{B}$: $\vec{B}_n = \vec{B}_i + \vec{B}_r$

$$= B_0 \vec{e}_y (\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz))$$

$$\cos(p) + \cos(q) \dots$$

⇒ $\vec{B}_n = 2 B_0 \vec{e}_y \cos(kz) \cos(\omega t)$

amplitude de vibration $2 B_0 \cos(kz)$



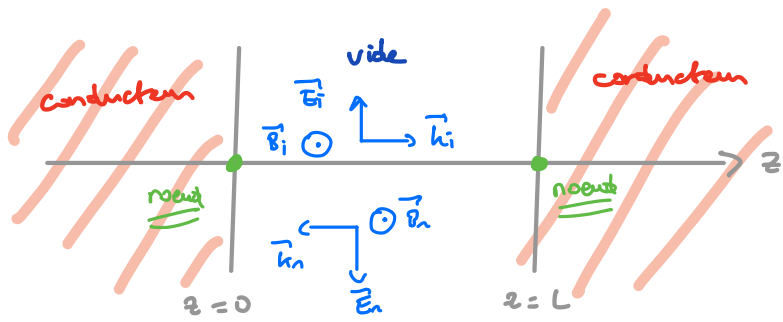
par rapport à $\vec{E}$, les
nœuds et les ventres
sont décalés de $\lambda/4$

2.5 Modes propres

Situation : on a toujours des ondes stationnaires dues à une réflexion totale, mais les ondes stationnaires sont "coincées" entre 2 surfaces réfléchissantes.

⇒ on a des ondes stationnaires, comme précédemment, mais quantifiées ($k, f, \dots$)

sont quantifiées, i.e ne peuvent prendre que certaines valeurs bien précises).



↑ cavité 1 Dimension

On reprend les calculs déjà faits :

$$\vec{k}_i = k \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

Reflection en $z=0$, donc $\vec{k}_r = -k \vec{e}_z$ comme précédemment

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x$$

C.L. $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$

La somme des ondes incidente et réfléchie donne une onde stationnaire :

$$\vec{E} = 2 E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_x \quad (\text{voir calcul précédent})$$

On ajoute ici la réflexion en $z=L$, ce qui impose la C.L (condition aux limites) :

$$\vec{E}(z=L) = \vec{0} \quad (\text{résulte de } \begin{cases} - \text{continuité } \vec{E} \text{ tangentiel} \\ - \vec{E} \text{ nul ds le conducteur} \end{cases})$$

Cette C.L impose donc $\vec{E}(z=L) = 2 E_0 \sin(kL) \sin(\omega t) \vec{e}_x = \vec{0}$

ceci doit être vrai $\forall t$ (noeud en $z=L$)

On veut donc $\sin(kL) = 0$, ce qui implique $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

D'où la quantification de k :

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

Et on en déduit la quantification de toutes les autres grandeurs, en particulier f et λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ donc}$$

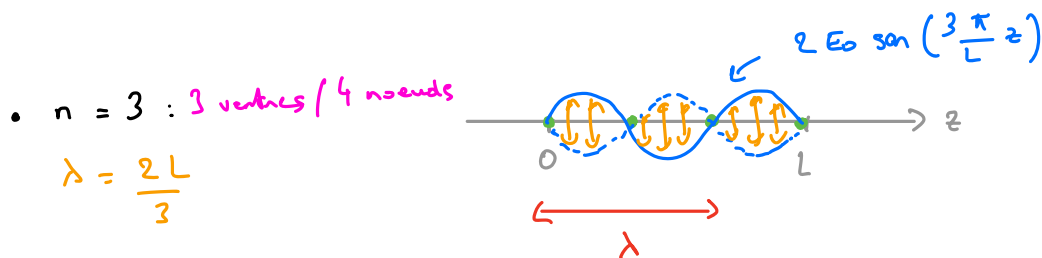
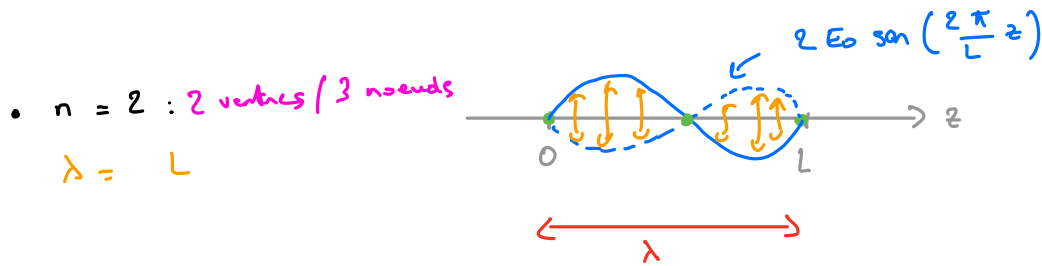
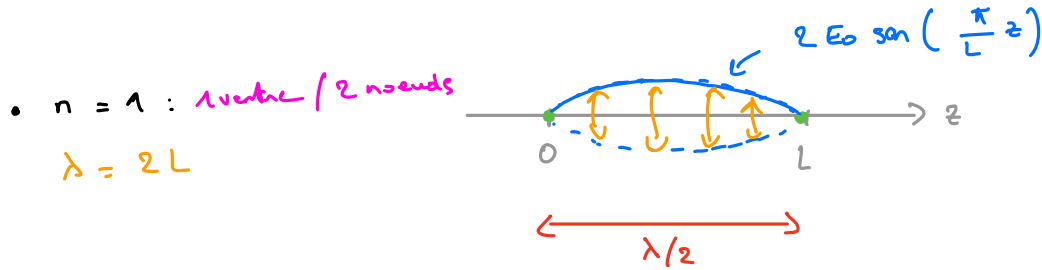
$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

pas $n=0$, car pas d'onde
pas $n < 0$, cela revient à déphaser de π .

et $\lambda = c \tau = c/f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$, donc $f = \frac{nc}{2L}$

Donc seules certaines ondes stationnaires, avec des fréquences (et aussi $\omega, \tau, \lambda, k, \phi$) bien définies peuvent exister dans le câble : phénomène de quantification

Les différentes valeurs de n possibles définissent les modes propres :



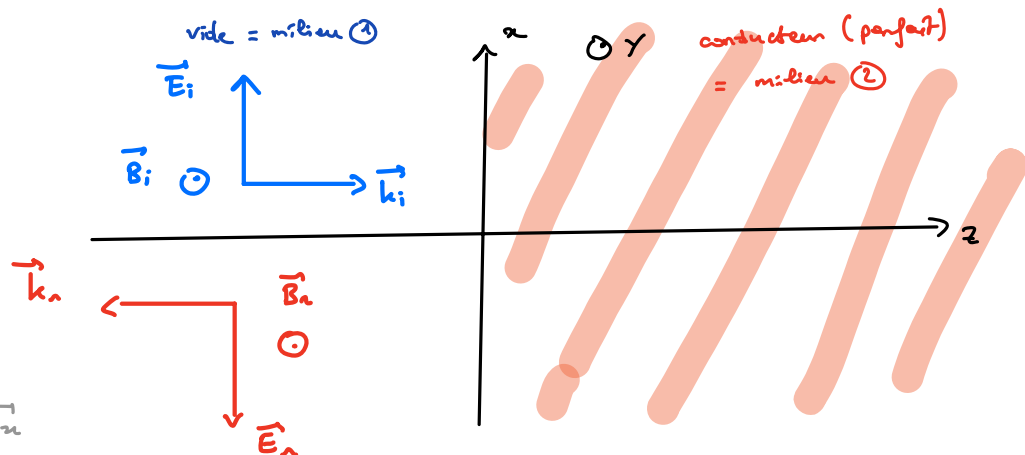
Application : instruments de musique (à corde, à vent ...)

2.6 Aspects énergétiques

On revient à la situation avec une seule surface réfléchissante.

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x$$



Que se passe-t-il en termes de propagation (déplacement) d'énergie ? RIEN !

On peut le voir de 2 manières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{T}_i \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_z : \text{pour l'onde incidente} \\ \langle \vec{T}_r \rangle = - \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_z : \text{pour l'onde réfléchie} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{les déplacements d'énergie} \\ \text{se compensent :} \\ \langle \vec{T}_i \rangle + \langle \vec{T}_r \rangle = \vec{0} \end{array} \right.$$

On peut aussi calculer Poynting pour l'onde stationnaire :

$$\vec{E} = 2 E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = 2 B_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

$$\text{Donc } \vec{T} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4 E_0 B_0}{\mu_0} \cos(kz) \sin(kz) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

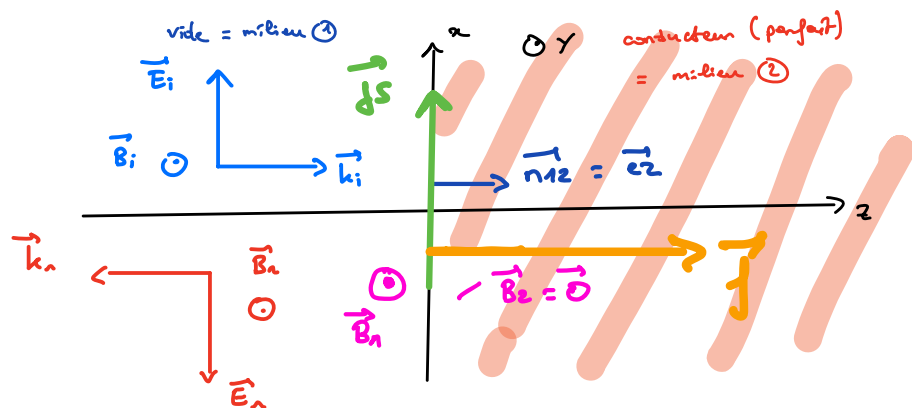
$$\text{D'où } \langle \vec{T} \rangle = \vec{0} \quad \text{car } \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = 0$$

Il n'y a aucun déplacement d'énergie avec une onde stationnaire !

2.7 Pression de radiation

l'onde incidente qui vient "rebondir" sur la paroi exerce une certaine force sur elle (comme pour la pression cinétique)



On peut voir cette force comme une force Laplace :

Juste à gauche de la paroi, le champ $\vec{B}$ vaut :

$$\vec{B}_1(z=0^-) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad (\text{calculs faits précédemment})$$

Discontinuité de $\vec{B}_\parallel$, donc courant de surface, que l'on calcule avec la relation de passage : $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{f}_s &= \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \\
&= \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z \wedge \left(\vec{0} - 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y \right) \\
&= \frac{-2 E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \underbrace{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y}_{= \vec{e}_x} = 2 \epsilon_0 c E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x
\end{aligned}$$

On en déduit la force de Laplace sur un morceau de surface S en $z = 0$:

$$\vec{f} = \iint_S \vec{f}_s \wedge \vec{B} \, dS \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}_{\text{au discontinuité}} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où} \quad \vec{f}_s \wedge \vec{B} &= 2 \epsilon_0 c E_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y}_{= \vec{e}_z} \\
&= 2 \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{f} = 2 \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) S \vec{e}_z \quad : \text{c'est bien vers les } z \uparrow \downarrow$$

$$\text{En valeur moyenne :} \quad \langle \vec{f} \rangle = \underbrace{\epsilon_0 E_0^2}_{P} S \vec{e}_z$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{P = \epsilon_0 E_0^2} \quad \text{pression de radiation.}$$

Application: voiles solaires --

On peut retrouver cette pression de radiation avec un point de vue complémentaire: