Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 16 : 20 au 24 janvier 2025

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec son cas d'égalité.
  Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$,
  $$f(1)^2 \leqslant 2\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t}.$$
  Étudier le cas d'égalité.
- ☐ Montrer que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre et que toute famille orthonormée est libre.
- ☐ On considère le produit scalaire suivant sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.
  Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☐ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est orthogonale si et seulement si la famille des colonnes de A forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puis montrer la même propriété pour les lignes de A.
- ☐ Soient X et Y des parties de E. Montrer que $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, que $X \subset Y$ implique $Y^\perp \subset X^\perp$, que $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ et que $X \subset (X^\perp)^\perp$.
- ☐ Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E.
  Montrer que $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
- ☐ Projecteur orthogonal sur un hyperplan, distance à un hyperplan : rappeler les formules et les redémontrer.

Chapitre 18 : Espaces préhilbertiens réels

I Produit scalaire et norme

I.1 Espaces préhilbertiens et euclidiens

- produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien.
- produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Exemples de produits scalaires sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}[X]$, sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- norme euclidienne.

I.2 Calculs et inégalités avec un produit scalaire

- identités remarquables, identités de polarisation, identité du parallélogramme.
- inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité, inégalité triangulaire.

II Familles orthogonales et orthonormées

II.1 Vecteurs orthogonaux

- vecteurs orthogonaux, familles orthogonale, famille orthonormée (ou orthonormale).
- théorème de Pythagore.
- toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Toute famille orthonormée est libre.

II.2 Bases orthonormées

- base orthogonale, base orthonormée.
- dans une base orthonormée, écriture des coordonnées d'un vecteur, écriture du produit scalaire, écriture de la norme.
- algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- théorème d'existence d'une base orthonormée. Théorème de la base orthonormée incomplète.

II.3 Matrices orthogonales

- matrice orthogonale. $O_n(\mathbb{R})$ (également noté $O(n)$) désigne l'ensemble des matrices orthogonales.
- une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes (ou de ses lignes) est une base orthonormée.
- $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, appelé groupe orthogonal.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors la famille $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$. Matrices orthogonalement semblables.

II.4 $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$

- si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \in \{-1; 1\}$.
- matrice orthogonale positive (ou directe), groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$.
- espace euclidien orienté, base directe, base indirecte. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

III Orthogonal d'une partie

III.1 Sous-espaces orthogonaux

- on dit que F et G sont orthogonaux si $\forall x \in F$, $\forall y \in G$, $\langle x, y \rangle = 0$.
- caractérisation par $\forall i \in I, \forall j \in J$, $\langle f_i, g_j \rangle = 0$, pour $(f_i)_{i \in I}$ une base de F et $(g_j)_{j \in J}$ une base de G.

III.2 Orthogonal d'une partie

- si X est une partie d'un espace préhilbertien réel E, définition de $X^\perp$.
- $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
- $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$.
- $X \subset (X^\perp)^\perp$.
- si F est un sous-espace vectoriel, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe et sont des sous-espaces orthogonaux. Notation : $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

III.3 Cas de la dimension finie

- si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E, alors $F\overset{\perp}{\oplus}F^{\perp} = E$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$. De plus, si E est euclidien, $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$.
- vecteur normal à un hyperplan.

III.4 Projection orthogonale

- définition du projecteur orthogonal sur F.
- dans une base orthonormée de F, expression du projeté orthogonal sur F.
- le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur y tel que $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$.
- projecteur orthogonal sur une droite, sur un hyperplan.
- distance d'un point à un sous-espace, distance atteinte en le projeté orthogonal.
- distance à un hyperplan.

À suivre la semaine prochaine :
Adjoint d'un endomorphisme.
Isométries vectorielles.
Endomorphismes auto-adjoints.