

ONDES EN MILIEUX CONDUCTEURS

1. Onde en dans un conducteur "modèle de Drude" (métal)

1.1 Conductivité, approximations

Conductivité en régime variable:

On considère un électron libre, soumis à

$$\begin{cases} - \text{champ } \vec{E} & : \vec{f}_{el} = -e \vec{E} \\ - \text{force de Drude} & \vec{f}_{drude} = -\frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{1}{\tau} \vec{v} \end{cases}$$

2^e loi de Newton pour l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}$

En régime sinusoïdal, et en complexes : $\frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega \vec{v}$

$$D' où \quad i m \omega \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{e \vec{E}}{m(i\omega + 1/\tau)}$$

$$\text{On en déduit } \vec{j} = q e n \vec{v} = n^* (-e) \vec{v}$$

$$D' où \quad \vec{j} = \frac{n^* e^2 \vec{E}}{m(i\omega + 1/\tau)} \quad \text{On, par définition, } \vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E} \quad \text{conductivité}$$

$$D' où \quad \underline{\gamma} = \frac{n^* e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

soit

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{avec } \gamma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

Rem : le caractère complexe de $\underline{\gamma}$ indique un déphasage entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$

conductivité
(complexe)
en régime
variable
sinusoïdal

conductivité
en RS

On se place dans la suite dans

l'approximation BF (basse fréquence)

pour laquelle $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$

Ordre de grandeur : pour avoir $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$, il faut $1 + i\omega\tau \approx 1$, donc

$\omega\tau \ll 1$. Or, $\tau \approx 10^{-14}$ s (temps de relaxation des e^- libres ds le métal)

Donc il faut $\omega \ll 10^{13} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{f \ll 10^{13} \text{ Hz}}}$ critère d'approximatif BF pour avoir $\delta \approx \delta_0$

On va également faire une autre approximation, toujours BF, moins restrictive : l'QRAS, qui consiste à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction dans Max-Ampère :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

négligeable

On a déjà vu que ceci nécessite

$f \ll 10^{16} \text{ Hz}$, donc c'est

moins restrictif que l'approximatif en δ .

Résumé :

on étudie les ondes en dans un métal en BF ($\ll 10^{13} \text{ Hz}$)

$$\text{et alors } \begin{cases} \delta = \delta_0 = \frac{n + e^2 \tau}{m} \\ \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

1.2 Equation de propagation et équation de dispersion

On se place dans le métal $\begin{cases} \rho = 0 \rightarrow \text{métal globalement neutre (à l'échelle microscopique)} \\ \vec{j} = \delta_0 \vec{E} \end{cases}$ approximatif BF

Eq. Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= 0 & \vec{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0 & \vec{\text{rot}}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

approximatif BF

On calcule ensuite $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E}))$:

$$\bullet \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \underbrace{\vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E}))}_{=0} - \vec{\Delta}(\vec{E}) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$$

$$\bullet \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \delta_0 \vec{E})$$

Max. Faraday *Max-Ampère* $= -\mu_0 \delta_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \delta_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

eq. propagation ondes en ds métal en BF

Rem : ce n'est pas une équation

On considère une solution de la forme :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \vec{e}_z$$

Onde plane, monochromatique,
polarisée en $\vec{e}_z$, en notation complexe

mais avec un vecteur d'onde $\underline{k}$ complexe : la signification de $\underline{k}$ complexe est que
 $\text{Re}(\underline{k})$ est liée à la propagation
 $\text{Im}(\underline{k})$ est liée à l'absorption

On injecte cette forme dans l'éq de propagation :

$$\Delta(\vec{E}) = -\underline{k}^2 \vec{E} \quad \text{et} \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 i \omega \vec{E}$$

$$\text{D'où} \quad -\underline{k}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 i \omega \vec{E}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = -i \mu_0 \epsilon_0 \omega$$

relat dispersion
onde en
métal

1.3 Solutions

On se place dans une situation
particulière : dans le vide, l'amplitude

de l'onde est E_0 :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \vec{e}_z \quad \text{pour } z < 0$$

↑
avec $k = \omega/c$, ds le vide

On reprend $\underline{k}^2 = -i \mu_0 \epsilon_0 \omega$

$$\text{Cela donne} \quad \underline{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \omega}$$

$$= \pm (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{2}}$$

On pose

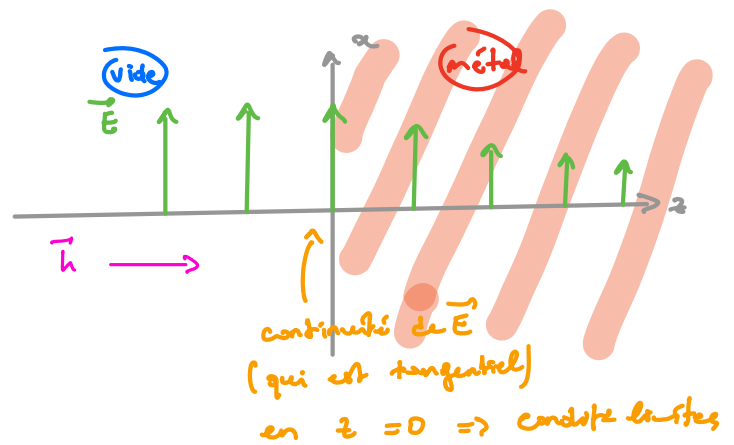
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \epsilon_0 \omega}}$$

↑
épaisseur de peau, homogène à une longueur

$$\text{et ainsi} \quad \underline{k} = \pm (1-i) \cdot \frac{1}{\delta}$$

de d'Alembert (il faut le $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$) ,

cela ressemble à une équation
de diffusion



$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\pi/2}} = e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Dans le contexte précisé ci-dessus, la solution à l'équation de propagation

$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ vont donc s'écrire :

$$\vec{E} = \underline{A} e^{i(\omega t - (1-i) \cdot \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x + \underline{C} e^{i(\omega t + (1-i) \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$$

$$= \underline{A} e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x + \underline{C} e^{i(\omega t + z/\delta)} e^{z/\delta} \vec{e}_x$$

Or, ici $\underline{C} = 0$ sinon pour $z \rightarrow \infty$ ($z \gg \delta$) $E \rightarrow \infty$, pas physiquement acceptable

Donc $\vec{E} = \underline{A} e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x$

Alors, la C.L. donne $\underline{A} = E_0$

Finalement : $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x$

On repasse en réel :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - z/\delta) e^{-z/\delta} \vec{e}_x$$

terme de propagation | terme d'absorption
d'amortissement

la forme de l'onde est essentiellement la même que dans le vide, avec un terme d'amortissement en plus $e^{-z/\delta}$,

On peut en déduire $\vec{B}$: c'est une onde plane même avec le terme $e^{-z/\delta}$, donc on utilise $\vec{B} = \frac{\vec{h} \wedge \vec{E}}{\omega}$:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1-i}{\delta} \vec{e}_z \right) \wedge \left(E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x \right)$$

nécessairement en complexes, car $\vec{h}$ est complexe !

Or, $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\omega \delta} e^{i(\omega t - z/\delta - \pi/4)} e^{-z/\delta} \vec{e}_y$$

B_0

dimensionnellement,

on a bien $B_0 = \frac{E_0}{vitesse}$

déphasage : $\vec{B}$ est en retard de $\pi/4$

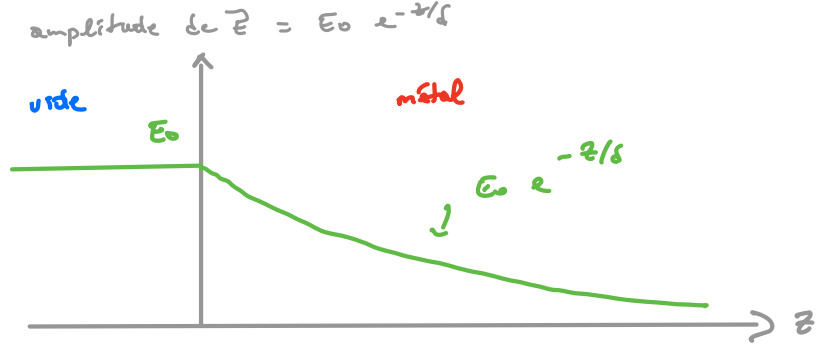
car $\omega \delta = vitesse$

1.4 Effet de peau

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - z/\delta) e^{-z/\delta} \vec{e}_x$$

: l'amplitude $E_0 e^{-z/\delta}$ du champ diminue avec z , lorsque l'onde pénètre plus profondément dans le métal

Cette décroissance est analogue à un régime transitoire du 1^{er} ordre : pour $z = 3\delta$, l'amplitude est divisée par 20.



ordres de grandeur de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ → fréquence

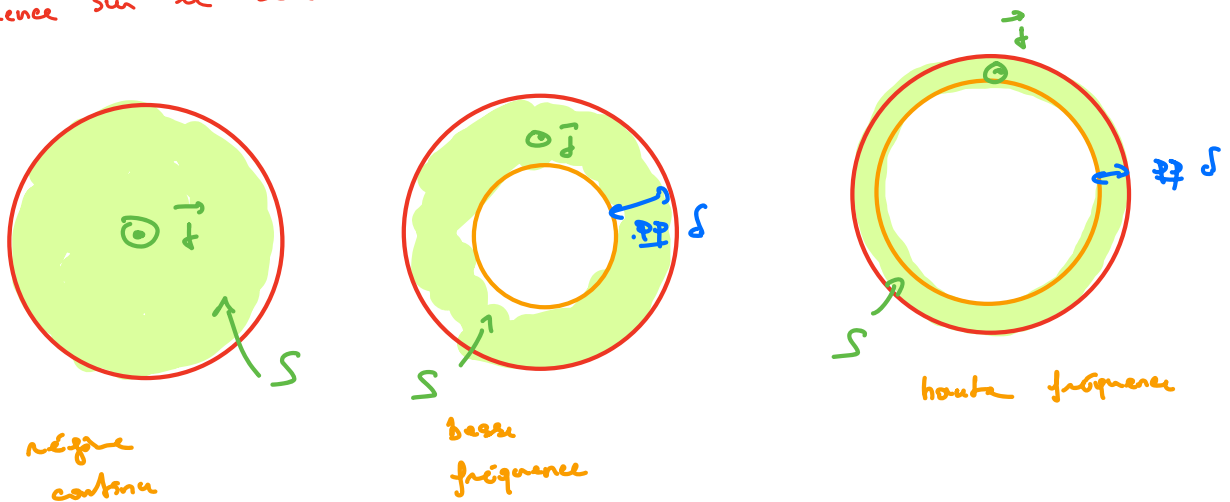
↓
conductivité du métal

ex pour le cuivre :
($\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$)

f	δ
16 kHz	2 μm
1 MHz	60 μm
1 kHz	2 mm
1 Hz	6 cm

Retour sur le modèle du conducteur parfait : si δ est "petit", $\vec{E}$ décroît très rapidement dans le conducteur
⇒ " $\vec{E}$ est nul "

conséquence sur le courant électrique dans un fil en régime variable :



+ on est en HF et + le courant électrique ne circule qu'à la périphérie du conducteur. En conséquence, la résistance électrique d'un conducteur ↑ lorsque f ↑ du fait de l'effet de peau.

$$(R = \frac{l}{\sigma S})$$

On peut également, à partir de la formule $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - z/\delta) e^{-z/\delta} \vec{e}_z$ et de la relation de dispersion $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma$ qui donne $k = \pm (1-i) \cdot \frac{1}{\delta}$

$$\Rightarrow \text{Re}(k) = \pm 1/\delta$$

$$\text{Im}(k) = \pm 1/\delta$$

obtenir :

- la vitesse (de phase) : $v_p = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{\omega}{1/\delta} = \delta \omega = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \epsilon_0}}$

ex : courbe à 1 MHz,

$v_p \approx 400 \text{ m/s}$

Cela paraît peu comparé au vide ...

Rem : $v_g = 2 v_p$ pour le métal
vitesse de phase

vitesse de groupe
(cf partie sur le plasma)

- la longueur d'onde :

$\lambda = \frac{2\pi}{\text{Re}(k)} = \frac{2\pi}{1/\delta} = 2\pi\delta$

1.5 Utilisation des complexes pour calculer une valeur moyenne (mise au point technique)

Quand on veut calculer la valeur moyenne d'un produit de fonctions sinusoidales (de même fréquence) : par exemple, $\langle p \rangle = \langle u i \rangle$ en électricité ...

On pose $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$
 $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$

On veut calculer la valeur moyenne $\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t) dt$

Donc $\langle fg \rangle = \frac{f_0 g_0}{T} \int_0^T \underbrace{\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)}_{\frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]} dt$

$= \frac{f_0 g_0}{2T} \left(\underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt}_0 + \underbrace{\int_0^T \cos(\varphi) dt}_{T \cos(\varphi)} \right)$

D'où $\langle fg \rangle = \frac{f_0 g_0 \cos(\varphi)}{2}$ ex : en électricité, $\langle p \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos(\varphi)}{2}$

Autre méthode pour obtenir ce résultat, avec les complexes :

On utilise f et g complexes associés à f et g : $\underline{f}(t) = f_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{g}(t) = g_0 e^{i\omega t + \varphi}$

On calcule le produit $\underline{f} \cdot \underline{g}^*$ (ou $\underline{f}^* \underline{g}$) :

↑
complexe conjugué de g

$$f \cdot g^* = f_0 e^{i\omega t} g_0 e^{-i\omega t} e^{-i\varphi} = f_0 g_0 e^{-i\varphi}$$

Puis on prend la partie réelle : $\text{Re}(f g^*) = f_0 g_0 \cos(-\varphi) = f_0 g_0 \cos(\varphi)$

Conclusion :

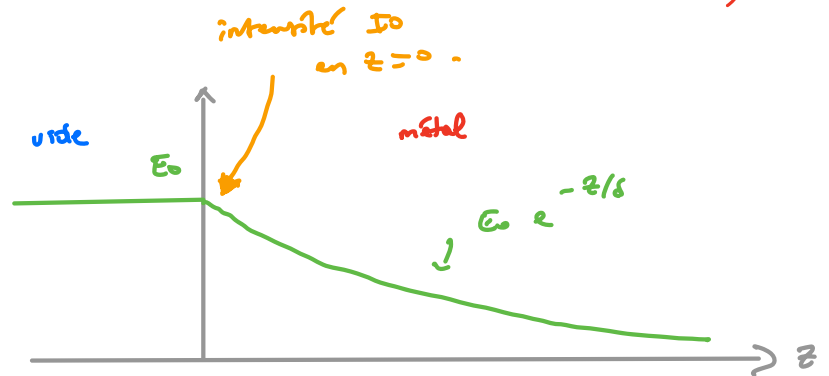
$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(f g^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(g^* f)$$

On obtient directement la valeur moyenne, par rapport au temps instantané avec cette méthode.

⚠ c'est la seule bonne manière d'utiliser les complexes avec des relations non linéaires (tout ce qui concerne l'énergie en particulier)

1.6 Absorption

L'amplitude de l'onde $\rightarrow$ avec la profondeur, c'est donc que une partie de l'énergie de l'onde est absorbée par le métal.



Calculons $\langle \vec{u} \rangle$:

On utilise l'astuce du 1-5 :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \rangle &= \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^* \wedge \vec{B}) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}\left(\frac{\vec{E}^* \wedge (\vec{h} \wedge \vec{E})}{\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \text{Re}\left((\vec{E}^* \cdot \vec{E}) \vec{h} - \underbrace{(\vec{E}^* \cdot \vec{h}) \vec{E}}_0\right) = \frac{1}{2\mu_0 \omega} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{E} \vec{h}) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{E}^* \cdot \vec{E} &= E_0 e^{-i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x \cdot E_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta} \vec{e}_x \\ &= E_0^2 e^{-2z/\delta} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \langle \vec{u} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \omega} \text{Re}\left(E_0^2 e^{-2z/\delta} \vec{h}\right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{-2z/\delta} \text{Re}(\vec{h})$$

$$\text{Or, } \text{Re}\left(\frac{\vec{h}}{\delta}\right) = \text{Re}\left(\frac{1-i}{\delta} \vec{e}_z\right) = \frac{1}{\delta} \vec{e}_z, \text{ donc finalement :}$$

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} e^{-2z/\delta} \vec{e}_z$$

→ on voit que le sens est bien vers les z ↑
 → atténuation en $e^{-2z/\delta}$ de la puissance (surfacique)

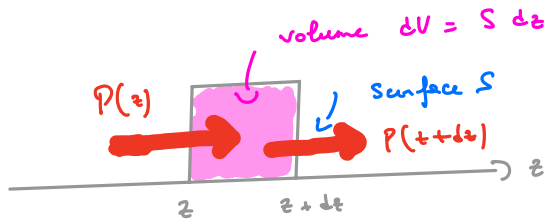
On peut poser $I = \|\langle \vec{K} \rangle\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta} e^{-2z/\delta}$

Et en $z=0$, $I = I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}$, et ainsi

$$I = I_0 e^{-2z/\delta}$$

Pour finir (suite de l'exercice corrigé) :

Calcul de la puissance (moyenne) absorbée dans un certain volume :



puissance absorbée = "ce qui entre"
 - "ce qui sort" :

$$P(z) = I(z) S = I_0 S e^{-2z/\delta}$$

↑
 puissance
 entrante

$$P(z+dz) = I(z+dz) S = I_0 S e^{-2(z+dz)/\delta}$$

$$\text{Or, } e^{-2(z+dz)/\delta} = e^{-2z/\delta} e^{-2dz/\delta}$$

$$\text{et } e^{-2dz/\delta} \approx 1 - \frac{2dz}{\delta}$$

$$\text{D'où } P(z) - P(z+dz) = I_0 S \left(e^{-2z/\delta} - e^{-2z/\delta} \left(1 - \frac{2dz}{\delta} \right) \right)$$

$$= I_0 S e^{-2z/\delta} \cdot \frac{2dz}{\delta} = \underbrace{I}_{I_0 e^{-2z/\delta}} \cdot \frac{2}{\delta} \underbrace{S dz}_{dV}$$

D'où la puissance absorbée par u. de volume :

$$\langle P_{\text{vol}} \rangle = \frac{P(z) - P(z+dz)}{S dz} = \frac{2I}{\delta} = \frac{2 I_0 e^{-2z/\delta}}{\delta}$$

On peut aussi l'exprimer en fct de E_0 : $I_0 = \frac{E_0^2}{2\omega\delta\mu_0}$

Donc $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \frac{E_0^2}{2\omega\delta\mu_0} e^{-2z/\delta}$ Or, $\frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}$

Donc $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \frac{E_0^2}{\cancel{2\omega\delta\mu_0}} e^{-2z/\delta} \cdot \frac{\cancel{\mu_0 \gamma_0 \omega}}{2} = \frac{\gamma_0 E_0^2}{2} e^{-2z/\delta}$

On aurait pu obtenir ce $\langle P_{\text{vol}} \rangle$ plus simplement :

On a vu que la puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{Or,} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{donc} \quad \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$$

$$\text{D'où} \quad \langle P_{\text{vol}} \rangle = \sigma \langle E^2 \rangle = \sigma \frac{E_0^2}{2} e^{-2z/\delta}$$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - z/\delta) e^{-z/\delta} \vec{e}_z$$

2. Onde dans un plasma

2.1 Modèle de plasma, conductivité

plasma = milieu ionisé par dens.

ex : l'ionosphère, la dissociation atome $\rightarrow e^-$ est due à l'absorption des rayonnements solaires $\rightarrow \text{ion}^+$

La densité est de l'ordre de $n^+ \approx 10^{10}$ à 10^{12} m^{-3} dans l'ionosphère

$$\text{à comparer à} \quad n^+ = \frac{\rho}{k_B T} \approx \frac{10^5}{1,4 \cdot 10^{-23} \times 300}$$

Comme le plasma est très dilué, il n'y a quasiment pas d'interactions entre les e^- et les ions $^+$ (contrairement au métal !, pas de force de Drude) -

$$\approx \frac{1}{5} \cdot 10^{26} \\ \approx 2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Comme la masse des ions $^+$ est grande devant celle des électrons (au moins un facteur 2000), ils sont beaucoup moins mobiles et de ce fait ne contribuent que de manière négligeable à la conductivité.

Ainsi, on calcule la conductivité en ne prenant en compte que les électrons

e^- soumis à un champ $\vec{E}$: la seule force est $\vec{f}_{\text{el}} = -e \vec{E}$

$$\text{PFD pour un } e^- : m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

$$\text{en régime sinusoïdal : } \frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega \vec{v} \Rightarrow m i\omega \vec{v} = -e \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{-e \vec{E}}{i m \omega}$$

Puis, $\vec{j} = n^* (-e) \vec{v} = \frac{n^* e^2 \vec{E}}{i m \omega}$ d'où

$$\underline{\underline{\epsilon = \frac{n^* e^2}{i m \omega}}}$$

Rem : la conductance complexe peut indiquer un déphasage de $\pi/2$ entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ($\vec{j} = \epsilon \vec{E}$, donc $\arg(\vec{j}) - \arg(\vec{E}) = \arg(\epsilon) = -\pi/2$)
 $\phi_{\vec{j}/\vec{E}}$
 $\vec{j}$ est en retard de $\pi/2$

ordre de grandeur : $|\underline{j}| \approx 10^{-3}$ à 1 MHz
 (VS) $\sim 10^2$ pour un métal, en S.m⁻¹)

Pour la suite, on pose $\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{\epsilon_0 m}}$

pulsation plasma
 (homogène à un temps⁻¹)

analyse dimensionnelle :
 $j = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 n \omega} \Rightarrow \frac{e^2}{\epsilon_0} = j \cdot n^2$
 $\text{kg.m.s}^{-2}.m^2$

donc $\frac{n^* e^2}{\epsilon_0 m} = \frac{n^*}{m} j \cdot n^2$
 $m^{-3}.kg^{-1} \cdot kg.m^3.s^{-2} = s^{-2}$

Avec cette notation ω_p , l'expression de la conductance devient :

$\epsilon = \frac{n^* e^2}{i m \omega}$ et $\omega_p^2 = \frac{n^* e^2}{\epsilon_0 m} \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon = \frac{\epsilon_0}{i \omega} \omega_p^2}}$

ordre de grandeur pour ω_p : cela ne dépend que de n^* !
 avec $n^* \approx 10^{10} m^{-3}$ à $10^{12} m^{-3}$: $\omega_p = 5,6 \cdot 10^4 s^{-1}$ à $5,6 \cdot 10^7 s^{-1}$
 $f_p = 900 \text{ kHz}$ à 9 MHz
 (ionosphère) $\Rightarrow f_p$ est de l'ordre de 9 MHz

2.2 Equation d'onde, relation de dispersion

$\begin{cases} \rho = 0 \text{ (plasma localement neutre)} \\ \vec{j} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$

$\text{div}(\vec{E}) = 0$
 $\text{div}(\vec{B}) = 0$

$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 dans la suite, on prend les eq. Max en complexes.

Même démarche que pour le métal, mais pas d'approximation BF.

$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$
 et $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\vec{B})) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Max.
Faraday

$$= -\mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'où $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{= \frac{1}{c^2}} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

cela ressemble à l'équation de d'Alembert avec un terme en plus.

Si on remplace ϵ par $\frac{\epsilon_0}{i\omega} \omega_p^2$: $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{1/c^2} \omega_p^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Soit $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{i\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

même chose pour $\vec{B}$.

Comme dans le vide, on considère une forme d'onde plane monochromatique : polarisée en $\hat{e}_u$.

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_u$$

On injecte dans l'équation pour obtenir l'équation de dispersion :

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(-\omega^2 \vec{E} + \frac{\omega_p^2}{i\omega} \cancel{\omega} \vec{E} \right)$$

D'où $k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$

Relation de dispersion pour le plasma (Klein-Gordon)

2.3 Fréquence de coupure, solutions

Deux comportements radicalement différents selon que ω est $>$ ou $<$ à ω_p :

- si $\omega > \omega_p$: $\omega^2 - \omega_p^2 > 0 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow \underline{k}$ est réel.

soit $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ relation de dispersion HF

Tout se passe (presque) comme dans le vide : propagation sans absorption
 $\hookrightarrow$ voir § suivant

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_u$$

$$\vec{B} = \frac{k E_0}{\omega} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_v$$

• si $\omega < \omega_p$: $\omega^2 - \omega_p^2 < 0$ et $\underline{h}$ est imaginaire pur.

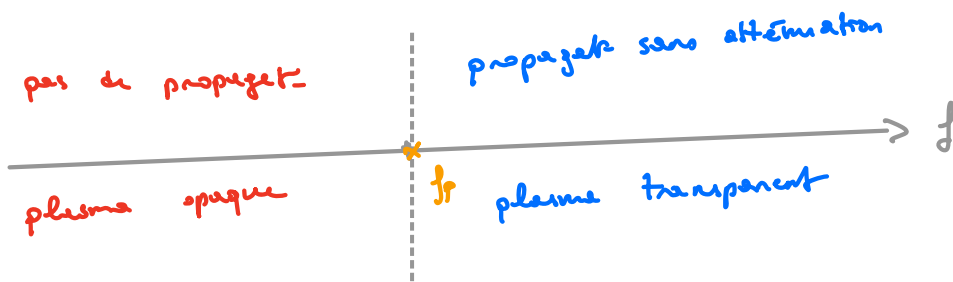
On peut poser $\underline{h} = -i/\delta$.

$$\begin{aligned}\underline{E} &= E_0 e^{i\omega t} e^{-z/\delta} \underline{e_x} \\ \Rightarrow \underline{E} &= E_0 \cos(\omega t) e^{-z/\delta} \underline{e_x}\end{aligned}$$

Donc pas de propagation, seulement une oscillation et une atténuation.

On parle d'onde évanescence (mais ce n'est pas une onde !)

Le résultat ci-dessus est essentiellement que l'onde ne se propage pas dans le plasma, le plasma est opaque en basse fréquence.

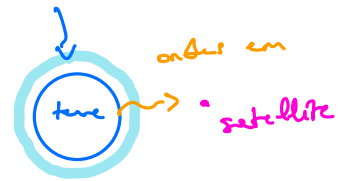


$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n \cdot e^2}{\epsilon_0 m}} \sim 9 \text{ MHz (ionosphère)}$$

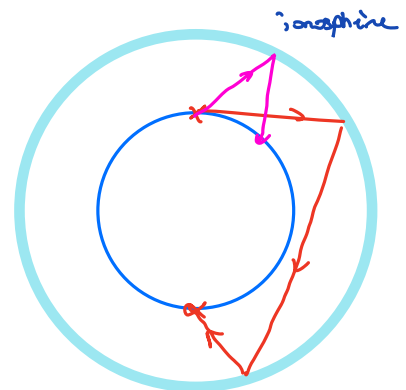
Comportement passé haut du plasma vs. ω des ondes en ionosphère

conséquences pratiques:

→ pour communiquer avec des satellites, situés au-delà de l'ionosphère, il faut des ondes en de fréquence $> f_p$.



→ on peut mettre à profit la réflexion d'ondes en de fréquence $< f_p$ sur l'ionosphère pour atteindre des points + éloignés de la surface terrestre.



2.4 vitesse de phase et vitesse de groupe

Pour une onde plane monochromatique dans le vide :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k z) \vec{e}_x, \text{ et relat de dispersion } k = \frac{\omega}{c}.$$

la vitesse de propagation étant $c = \frac{\omega}{k}$ $\xrightarrow{s^{-1}}$ $\xrightarrow{m^{-1}}$

D'une manière générale, on pose

$$v_p = \frac{\omega}{k} \text{ est la vitesse de phase}$$

Dans un milieu non dispersif, comme le vide, v_p est "la vitesse de propagation de l'onde" sans plus de complications.

C'est plus compliqué dans un milieu dispersif :

Un milieu est dispersif si $v_p = \frac{\omega}{k}$ dépend de la fréquence

Comment le savoir ? tout dépend de la relation de dispersion.

• dans le vide : $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = c \leftarrow \text{ne dépend pas de } \omega : \text{non dispersif}$

• plasma domaine transparent : $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$
 $\Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \left. \begin{array}{l} v_p \text{ dépend} \\ \text{de } \omega \\ \Rightarrow \text{milieu} \\ \text{dispersif.} \end{array} \right\}$

Pourquoi c'est plus compliqué dans un milieu dispersif ?

$\rightarrow$ sur une onde monochromatique, c'est juste v_p qui est +/- grande

$\rightarrow$ sur un paquet d'onde, qui contient différentes fréquences, cela

beaucoup de conséquences : vitesse de groupe $\neq$ vitesse de phase,

étalement du paquet d'onde ---

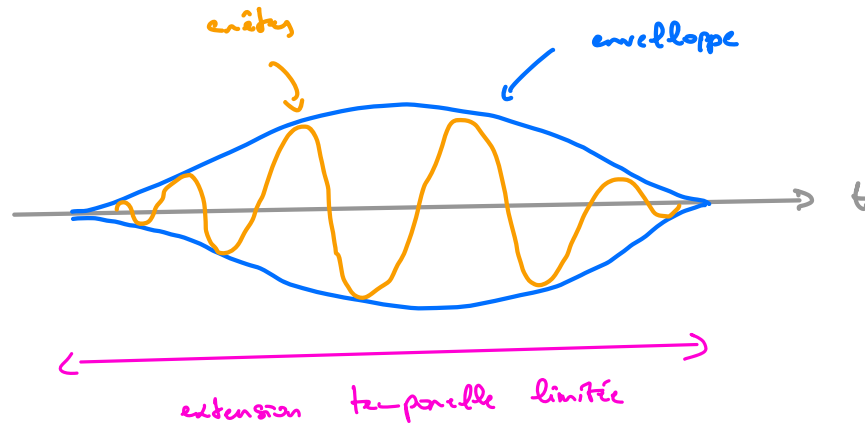
Pourquoi des paquets d'onde ?

Une onde monochromatique, illimitée dans le temps et dans l'espace,

ne peut représenter un phénomène physique réel.

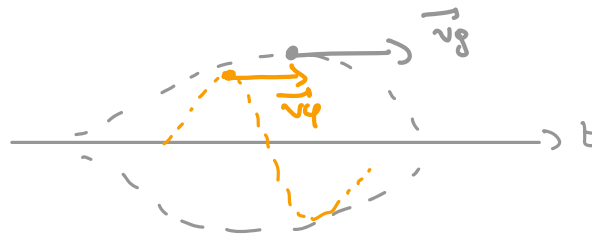
Donc pour bâtir un modèle réaliste, on doit sommer des ondes monochromatiques

ce qui donne un paquet d'onde:



D'une manière générale, les crêtes (les oscillations) et l'enveloppe (ensemble du paquet d'onde) ne se déplacent pas à la même vitesse.

- v_ϕ est la vitesse de phase
= vitesse des crêtes



- v_g est la vitesse de groupe
= vitesse de l'ensemble du paquet

c est la vitesse de groupe qui a le plus de signification physique

(vitesse de déplacement de l'énergie).

$v_g < c$, mais on peut avoir $v_\phi > c$.

Calcul de v_ϕ et v_g :

$$\boxed{\begin{aligned} v_\phi &= \frac{\omega}{k} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} \end{aligned}}$$

Pour le plasma : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} > c!$ $n = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

On remarque que, pour le plasma, $v_\varphi v_\varphi \neq c^2$

