Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 17 : 27 au 31 janvier 2025

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Énoncer et démontrer le théorème de représentation des formes linéaires d'un espace euclidien.
- ☐ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace euclidien. Montrer que u^* appartient à $\mathcal{L}(E)$ et montrer que $u \mapsto u^*$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
- ☐ Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
  Déterminer les coefficients de la matrice de f dans $\mathcal{B}$, puis montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^T$.
  Montrer que f est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.
- ☐ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et que $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.
- ☐ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Montrer que $u \in O(E)$ si et seulement si u préserve le produit scalaire.
  Montrer que $u \in O(E)$ si et seulement si $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$.
- ☐ Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $\| \cdot \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Montrer de deux manières différentes que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| = \|X\|$ *(l'une via un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, l'autre par un calcul direct).*

Chapitre 18 : Espaces préhilbertiens réels

Les parties I, II et III sont reprises du programme précédent.

I Produit scalaire et norme

II Familles orthogonales et orthonormées

III Orthogonal d'une partie

IV Adjoint d'un endomorphisme

Dans cette partie, E est un espace euclidien.

IV.1 Représentation d'une forme linéaire

- théorème de représentation d'une forme linéaire.
- définition de l'adjoint de u, noté u^*. u^* est un endomorphisme de E.
- linéarité de $u \mapsto u^*$, $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$, $(u^*)^* = u$.

IV.2 Matrice de u^* dans une base orthonormée

- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T$.
- $\det(u^*) = \det(u)$, $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{tr}(u^*) = \mathrm{tr}(u)$.

IV.3 Propriété de stabilité

- si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Chapitre 19 : Isométries vectorielles

Dans ce chapitre, E est un espace euclidien.

I Groupes $O(E)$ et $SO(E)$

I.1 Définition et exemples

- u est une isométrie vectorielle si u est un endomorphisme de E qui conserve la norme. Notation $O(E)$.
- symétries orthogonales. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
- une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Déterminant d'une réflexion.

I.2 Caractérisation des isométries

- caractérisation par la conservation du produit scalaire.
- caractérisation par $u^{-1} = u^*$. Les isométries vectorielles sont parfois appelées automorphismes orthogonaux.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors $u \in O(E)$ si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormée de E.
- à savoir redémontrer : si $u \in O(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

I.3 Groupe orthogonal $O(E)$

- $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal de E.

I.4 Groupe spécial orthogonal $SO(E)$

- si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.
- $SO(E)$: isométries vectorielles directes. $O(E) \backslash SO(E)$: isométries vectorielles indirectes.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors $u \in SO(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in SO_n(\mathbb{R})$.
- $SO(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.

II Isométries vectorielles en dimension 2

II.1 Etude de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})\backslash SO_2(\mathbb{R})$

- si $A \in SO_2(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, appelée matrice de rotation d'angle θ.
- si $A \in O_2(\mathbb{R})\backslash SO_2(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
- l'application $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$.
- $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe commutatif.
- $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe à $\mathbb{U}$.

II.2 Classification des isométries d'un plan euclidien

- si $\dim(E) = 2$ et si $u \in SO(E)$, alors u est une rotation.
- si $\dim(E) = 2$ et si $u \in O(E)\backslash SO(E)$, alors u est une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
- angle orienté de deux vecteurs non nuls.

III Réduction des isométries vectorielles

III.1 Théorème de réduction

- si $u \in O(E)$ et si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.
- théorème de réduction : si $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1×1 égaux à (1) ou (-1) et des blocs de taille 2×2 de type $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
- si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors A est orthogonalement semblable à une matrice de la forme décrite ci-dessus.

III.2 Réduction de $SO(E)$ lorsque $\dim(E) = 3$

- si $\dim(E) = 3$ et si $u \in SO(E)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$, appelée matrice de rotation d'angle θ. Lien entre l'angle θ et la trace de u. *Le calcul pratique des éléments géométriques de u n'est pas un attendu du programme.*
- si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, alors A est orthogonalement semblable à une matrice de la forme décrite ci-dessus.

À suivre la semaine prochaine :
Endomorphismes autoadjoints.