

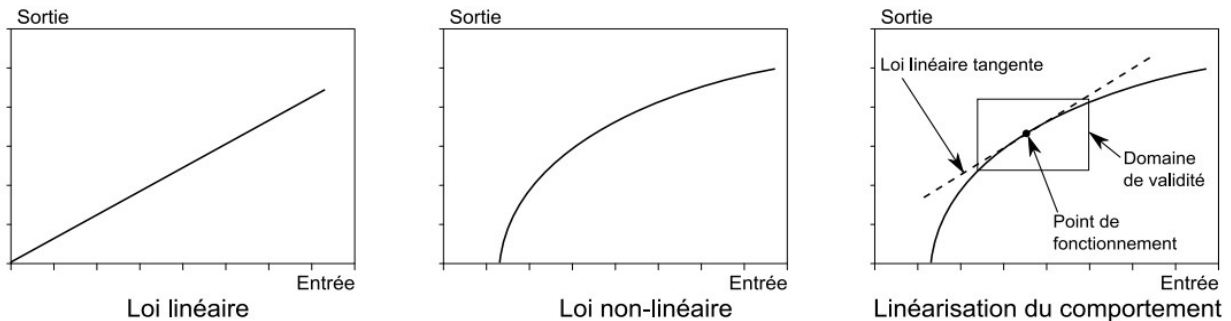
Caractériser les performances des SLCI

1 Rappels

1.1 Système linéaire

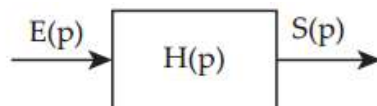
Définition	Système linéaire
Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.	

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de linéariser la réponse du système dans cette zone.



1.2 Modélisation

La relation entre les grandeurs physiques dans le domaine de Laplace peut être décrite sous forme de schéma-bloc :



$H(p)$ s'écrit sous la forme d'un quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1p + \dots + a_np^n}{b_0 + b_1p + \dots + b_dp^d}$$

On appelle **pôles** les racines du dénominateur et **zéros** les racines du numérateur.

La **forme canonique** consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes pour mettre la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a'_1p + \dots + a'_np^n}{1 + b'_1p + \dots + b'_dp^d} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec $N(p)$ et $D(p)$ des polynômes quelconques avec $N(0) = D(0) = 1$.

K est le gain statique de la fonction de transfert, α la classe du système et $d = d' + \alpha$ l'ordre du système.

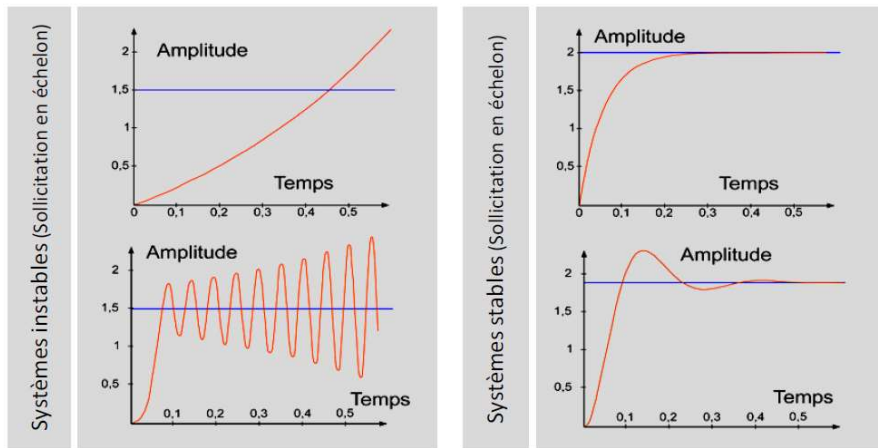
2 Stabilité des SLCI

La première contrainte à tenir pour un système asservi est la stabilité.

2.1 Rappel de la définition

Stabilité	Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. On note que la stabilité est une variable booléenne (un système est stable ou il ne l'est pas).
------------------	--

La stabilité est intrinsèque au système et est totalement **indépendante** du type d'entrée auquel il est soumis.



Remarque : Un système instable devrait osciller jusqu'à la destruction, ces oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs, butées physiques, . . .). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que la sortie du système est bornée.

L'étude de la stabilité d'un système peut être menée suivant deux approches :

- La première approche, basée sur l'étude des pôles de la **FTBF** du système, permet de savoir si le système est stable ou instable, d'un point de vue purement théorique, sans nous donner d'information sur la « situation » réelle du système relativement au seuil d'instabilité. Cette approche se révèle insuffisante si l'on souhaite **quantifier** la stabilité d'un système (problème de l'Ingénieur).
- La seconde approche, basée sur l'étude de la **FTBO** du système, nous permettra de « mesurer » la position du système par rapport à une situation instable. C'est cette approche qui permet à l'Ingénieur de définir des « **marges de stabilité** », afin de se tenir à distance d'une situation instable, et de garantir la stabilité du système réel dont les caractéristiques peuvent évoluer au cours du temps.

2.2 Méthodes d'étude de la stabilité à partir de la FTBF

2.2.1 Interprétation dans le plan des pôles

On rappelle que toute fonction de transfert (FTBF par ex.) peut être factorisée par ses pôles et zéros :

$$FTBF(p) = k \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

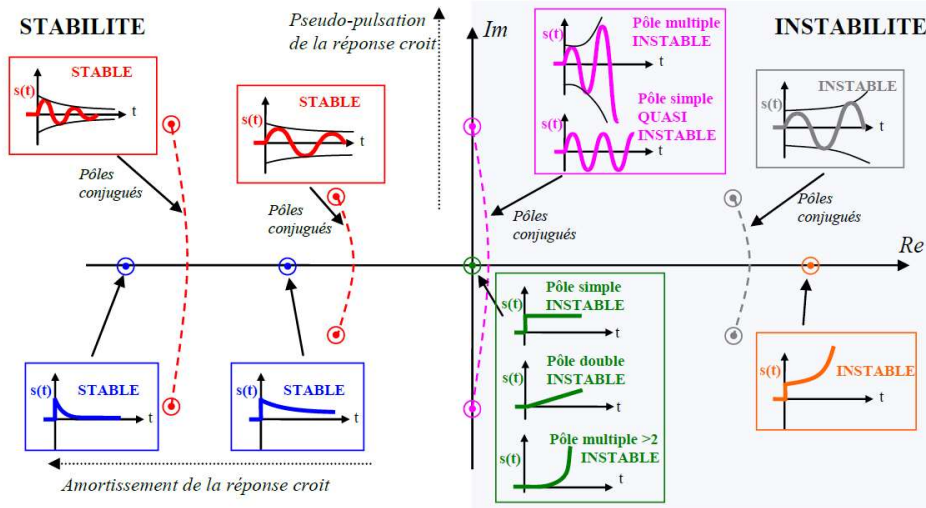
- avec
- z_i les zéros de la $FTBF(p)$ (racines du numérateur)
 - p_i les pôles de la $FTBF(p)$ (racines du dénominateur)
 - z_i et p_i peuvent être réels ou complexes.

Un système asservi est **stable si et seulement si** sa FTBF n'a que des pôles à partie réelle strictement négative :

$$\forall i, \text{Re}(p_i) < 0$$

On retiendra que cette condition est respectée dès lors que les signes des coefficients du dénominateur sont identiques.

Pour mieux comprendre le rôle des pôles de la FTBF, on représente ci-dessous l'allure de la réponse à l'impulsion de Dirac d'un système selon la position des pôles de sa FTBF.

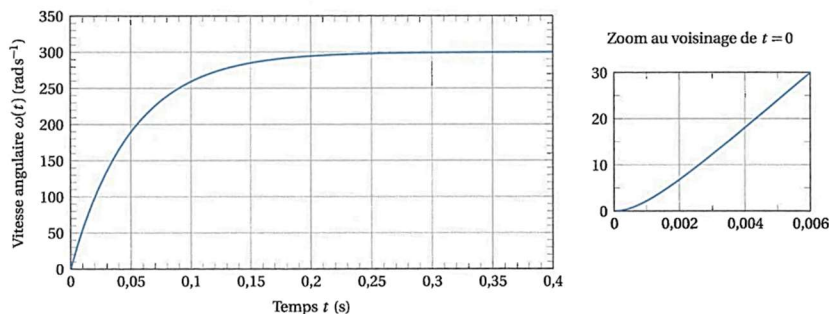


2.2.2 Pôle dominant et réduction d'ordre

Certains des pôles de la FTBF du système ont une **contribution prépondérante** sur le **comportement dynamique** du système : il s'agit des **pôles à partie réelle négative les plus proches de l'axe des imaginaires**. Ils sont appelés "**pôles dominants**", ce sont eux qui génèrent les temps de réponse les plus grands. A l'inverse, les pôles avec une partie réelle fortement négative (« très à gauche ») conduisent à des exponentielles convergent très rapidement.

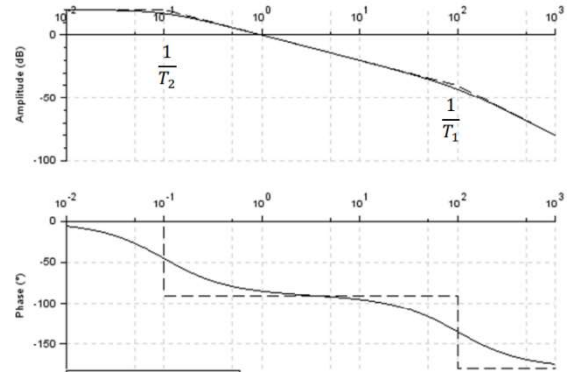
On peut souvent simplifier l'expression du dénominateur de la FTBF en ne conservant que les termes correspondant aux pôles dominants. Cette observation permet de **réduire l'ordre** de la fonction de transfert, en négligeant la participation des pôles rapides dont les effets ne sont visibles que dans les premiers instants de la réponse temporelle.

Exemple : Dans un moteur à courant continu, la très faible valeur de l'inductance L , amène à une « constante de temps électrique » (terme en $\frac{1}{Lp+R}$) très inférieure à la « constante de temps mécanique » (terme en $\frac{1}{Jp+f}$). Dans ce cas les pôles sont très éloignés les uns des autres, ce qui permet de le modéliser par un 1^{er} ordre plutôt qu'un 2nd ordre. Ce que nous avons fait de nombreuses fois déjà.



Attention : les conséquences de ces simplifications ne sont valables que pour des études basées sur les réponses temporelles. La réponse à une excitation harmonique à haute fréquence peut être fortement influencée par les « pôles rapides » (non dominants), et pas du tout par les pôles « lents » (dominants).

Sur le diagramme de Bode ci-contre, on vérifie que le modèle simplifié d'un 1^{er} ordre représente très bien la fonction de transfert en basse fréquence. Seules les composantes rapides des signaux temporels voient une différence de comportement entre le modèle non simplifié et le modèle simplifié.

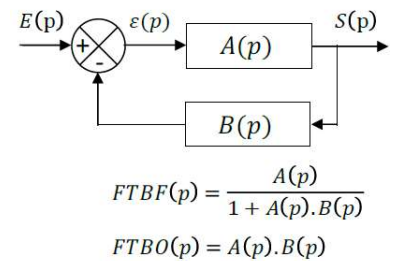


2.3 Méthode d'étude de la stabilité à partir de la FTBO - Critère du revers

Dans le cas d'un système asservi représenté par le schéma bloc ci-contre :

La stabilité est conditionnée par l'équation: $1 + FTBO(p) = 0$.

L'étude va être menée en considérant cette fois une entrée harmonique. Une instabilité correspond au fait que la sortie devienne très grande, voire infinie, pour une entrée bornée, c'est-à-dire que le module de la FTBF tend vers l'infini. Cela se produit lorsque le complexe $FTBO(j\omega)$ s'approche de $-1 + 0j$.



Étudier le signe des parties réelles des pôles de la $FTBF(p)$
 \Leftrightarrow
 Étudier le trajet de la $FTBO(p)$ par rapport au point $(-1 ; 0)$ dans le plan complexe.
 Le point $(-1 ; 0)$ du plan complexe s'appelle le « **point critique** ».

Emplacement du point critique dans le plan de Bode : $(-1; 0) \leftrightarrow -1 + 0.j$

$$\left. \begin{aligned} G_{dB} = 20 \log(|-1|) = 0 \\ \varphi = \arg(-1) = -180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Ce point servira à définir les marges de stabilité dans le plan de Bode.}$$

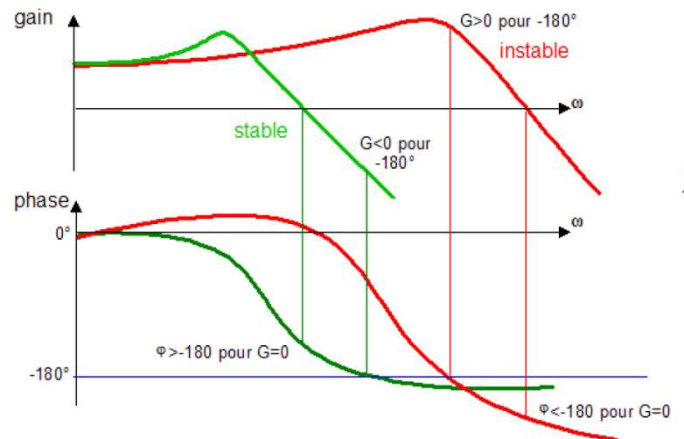
Conséquences : critères de stabilité dans le plan complexe et dans le diagramme de Bode

On trace les diagrammes associés à la $FTBO(p)$!

Dans le diagramme de Bode

Le système est stable en boucle fermée si pour la FTBO :

- la phase est supérieure à -180° lorsque le gain est nul, **ET**
- le gain est inférieur à $0dB$ lorsque la phase est à -180°



2.4 Marges de stabilité

Afin de se tenir à distance d'une situation instable et de **quantifier** la stabilité d'un système, on introduit les marges de stabilité.

On définit des marges de stabilité (pour garantir la stabilité absolue du système) :

- La marge de gain : $M_{G_{dB}} = - \ll \text{Gain de la FTBO lorsque } \varphi = -180^\circ \gg$
 - C'est-à-dire $M_{G_{dB}} = 0 - 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi=-180^\circ})|)$
- La marge de phase : $M_\varphi = \ll \text{Phase de la FTBO lorsque } G_{dB} = 0 \text{ dB} \gg - (-180^\circ)$
 - C'est-à-dire $M_\varphi = \arg(FTBO(j\omega_{0dB})) - (-180^\circ) = \arg(FTBO(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$

On peut faire apparaître les marges de phase M_φ et de gain $M_{G_{dB}}$ sur les diagrammes représentés ci-dessus. On note que dans le cas d'un système stable, marge de gain **et** marge de phase sont **positives** :

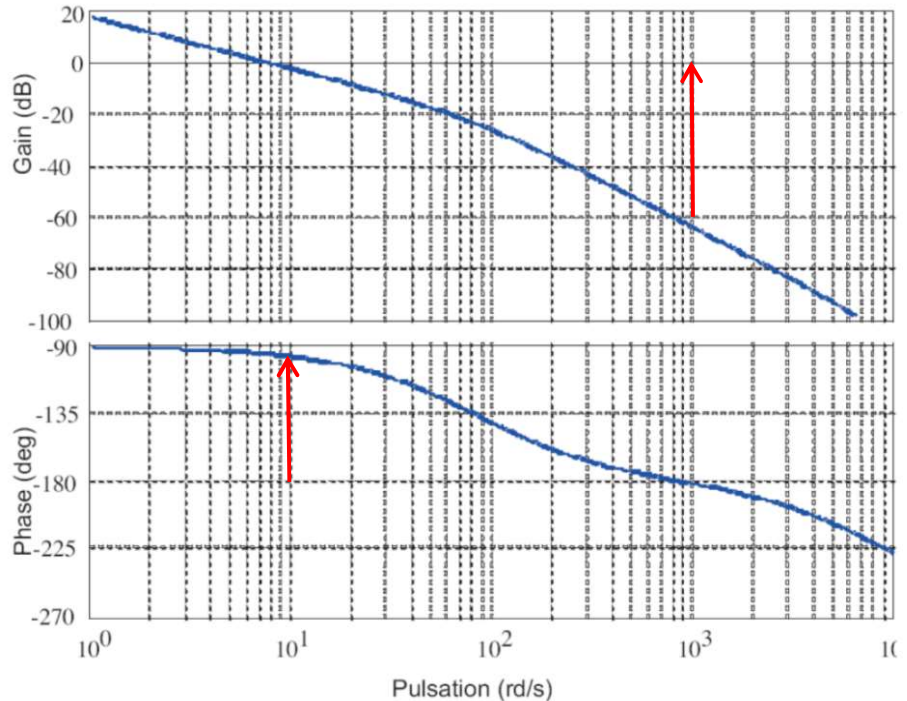
$$\text{Stabilité} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{G_{dB}} > 0 \\ M_\varphi > 0 \end{cases}$$

Pour garantir la stabilité, même sous l'effet de perturbation, le cahier des charges stipule généralement des marges de l'ordre de $10dB$ et 45° .

Exemple : Déterminer marge de gain et marge de phase pour le système suivant :

$$M_{G_{dB}} = 60dB$$

$$M_\varphi = -95 + 180 = 85^\circ$$



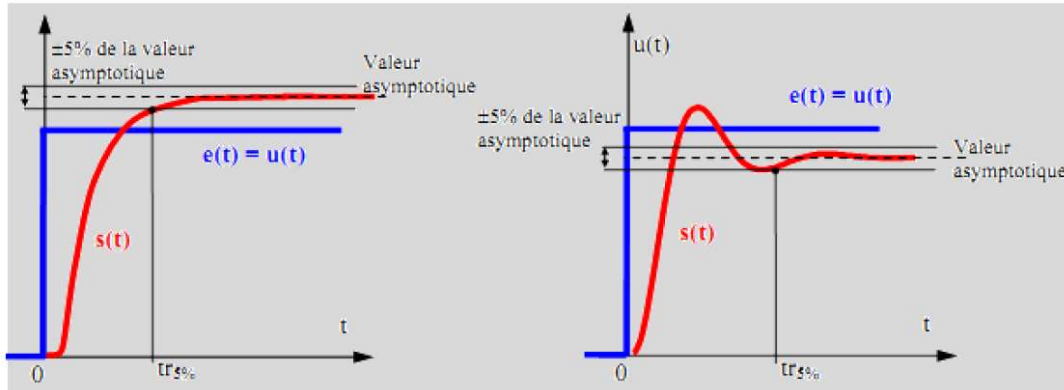
3 Rapidité des SLCI

3.1 En temporel

Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque (échelon) de la grandeur d'entrée.

La valeur finale est le plus souvent atteinte de manière asymptotique. On retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, **le temps de réponse à 5%**.



En régime oscillatoire amorti, le temps de réponse à 5% correspond à l'instant auquel la courbe rentre dans la zone à $\pm 5\%$ de la valeur asymptotique pour ne plus en sortir (voir exemples ci-dessus).

3.2 En fréquentiel : notion de bande passante

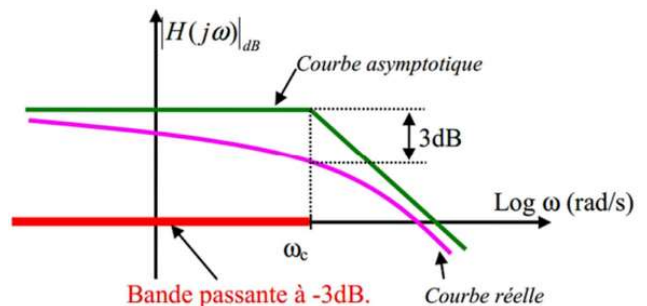
Lorsqu'un système est rapide, il a la capacité de suivre les variations brutales de la consigne d'entrée. Les systèmes étudiés se comportent très majoritairement comme des filtres passe-bas, c'est-à-dire qu'ils réagissent conformément aux consignes à basse fréquence mais ne parviennent plus à suivre les mouvements rapides à haute fréquence. Si on augmente la pulsation d'entrée, il existe une limite au-delà de laquelle la sortie voit son gain décroître.

Le critère retenu pour évaluer la rapidité en régime harmonique est donc la bande passante à $-n$ dB. En effet pour qu'un système soit rapide, il faut que sa sortie puisse être constituée de sinusoides hautes fréquences (confère la décomposition de Fourier).

La bande passante à $-n$ dB correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain asymptotique en régime statique moins n décibels. La plus courante est la bande passante à -3 dB qui correspond à la plage de fréquence pour lesquelles l'amplitude $H(j\omega)$ ne se trouve pas diminuée de plus de 30% de la valeur $H(0)$. En effet la valeur -3 dB correspond à un gain d'amplitude de $1 / \sqrt{2} \approx 0,7$. Dans certain cas, la bande passante à -6 dB est utilisée, correspondant à une amplitude diminuée d'un facteur 2.

Pour un premier ordre on sait que la bande passante à -3 dB vaut $1/\tau$. On a donc bien cette relation inverse entre la rapidité et la bande passante. Cette tendance mise en évidence pour un système du premier ordre peut se généraliser à tous les ordres de systèmes physiques.

Attention : cette recherche doit se faire sur la fonction de transfert en boucle fermée pour avoir du sens.

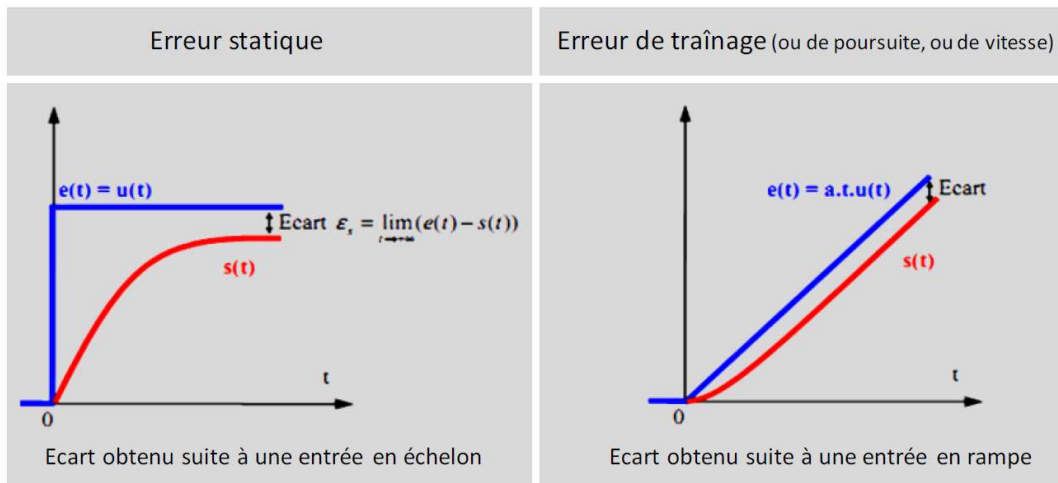


4 Précision des SLCI

4.1 Rappel de la définition

Précision Un système est précis s'il est **apte à atteindre la valeur de consigne**. La précision est caractérisée par l'écart (ou erreur) entre la consigne et la valeur effectivement atteinte en sortie. La précision est donc liée à la valeur finale ($t \rightarrow \infty$) de l'écart $e_r(t) = e(t) - s(t)$.

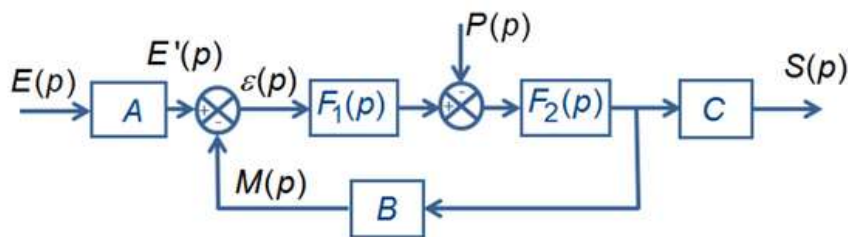
- Erreur statique, en régime permanent = $\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t))$ obtenue pour une entrée en échelon, rampe, accélération constante (voir ci-après).



On rappelle que l'erreur statique (que ce soit pour une entrée échelon ou rampe) peut être calculée avec le théorème de la valeur finale :

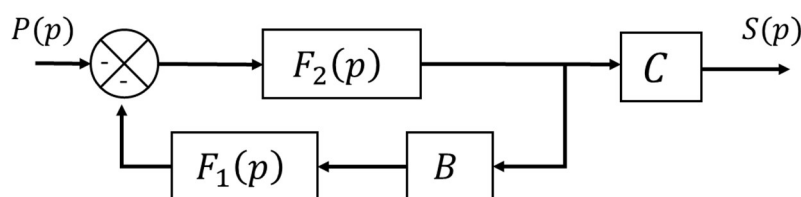
$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} p(E_c(p) - S(p))$$

4.2 Sensibilité aux perturbations



Pour déterminer si un système est sensible aux perturbations, on détermine la FTBF du système en perturbation **en supposant que l'entrée consigne est nulle**, notée ici $FTBF_p(p)$.

Pour déterminer $FTBF_p(p)$, on peut réorganiser le schéma bloc de sorte à mettre $P(p)$ à gauche, et supprimer $E(p)$:



Attention pour utiliser la formule de Black il faut les bons signes dans le comparateur !

Dans le schéma-bloc ci-dessus, on a :

$$FTBF_p(p) = -C \times \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \times F_2(p) \times B}$$

On calcule ensuite l'erreur statique qui doit être nulle pour que le système soit insensible aux perturbations.

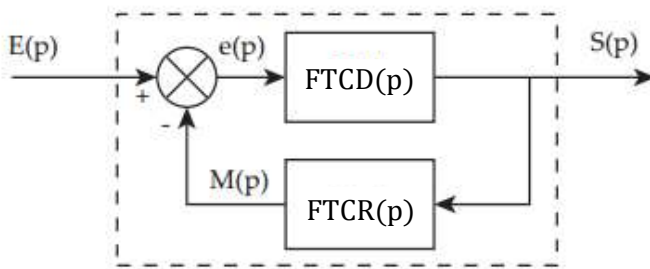
$$e_{rs} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_r(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) - s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} -pS(p)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} -pFTBF_p(p) \times P(p)$$

Attention $e(t)$ dans l'erreur statique correspond à l'entrée en consigne, on fait la différence entre la consigne et la sortie pour connaître l'erreur. En revanche pour une perturbation, il n'y a pas de différence, tout ce qui est induit par la perturbation est une erreur.

4.3 Précision par la fonction de transfert en boucle ouverte

4.3.1 Rappel FTBO sous forme canonique



$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{e(p)} = FTCD(p)FTCR(p)$$

De plus, sous forme canonique la FTBO s'écrit $FTBO = \frac{K_{BO} N(p)}{p^{\alpha_{BO}} D(p)}$.

Avec $N(p)$ et $D(p)$ des polynômes quelconques avec $N(0) = D(0) = 1$. K_{BO} est le gain statique de la fonction de transfert, α_{BO} la classe du système.

4.4 Tableau erreur-classe-entrée (à connaître)

Nous allons remplir le tableau suivant donnant la précision d'un système en fonction de la classe de sa FTBO et du type d'entrée. Par la suite il sera un résultat de cours et pourra être utilisé sans démonstration. Attention cela n'est valable que pour la FTBO.

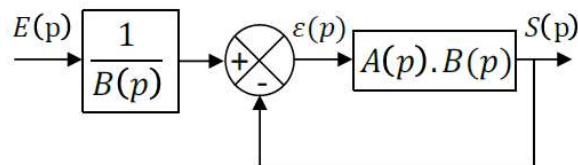
Classe α_{BO}	Erreur statique ε_s Pour $e(t) = E_0 u(t)$	Erreur de trainage ε_t Pour $e(t) = V t u(t)$	Erreur en accélération ε_a Pour $e(t) = a t^2 u(t)$
0	$\frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	∞	∞
1	0	$\frac{V}{K_{BO}}$	∞
2	0	0	$\frac{2a}{K_{BO}}$
3	0	0	0

4.5 Démonstrations

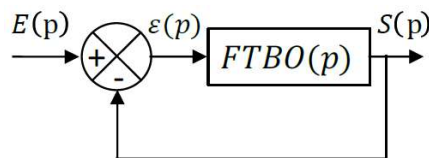
On a vu que :

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)(1 - FTBF(p))$$

On peut montrer que tout système peut se mettre sous forme d'un schéma-bloc à retour unitaire :



Ainsi, en s'intéressant uniquement à la boucle :



L'erreur devient alors :

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \left(1 - \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} \right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \left(\frac{1 + FTBO(p) - FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} \right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \left(\frac{1}{1 + FTBO(p)} \right)$$

$$\text{Or } FTBO(p) = \frac{K_{BO} N(p)}{p^{\alpha_{BO} D(p)}}$$

D'où

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \left(\frac{p^{\alpha_{BO} D(p)}}{p^{\alpha_{BO} D(p)} + K_{BO} N(p)} \right)$$

4.5.1 Erreur pour une entrée en échelon (première colonne)

Pour une entrée en échelon, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}(E_0 \cdot u(t)) = \frac{E_0}{p}$$

Ainsi

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0}{p} \left(\frac{p^{\alpha_{BO} D(p)}}{p^{\alpha_{BO} D(p)} + K_{BO} N(p)} \right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} E_0 \left(\frac{p^{\alpha_{BO} D(p)}}{p^{\alpha_{BO} D(p)} + K_{BO} N(p)} \right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^{\alpha_{BO}}}{p^{\alpha_{BO}} + K_{BO}}$$

En fonction de la classe :

$$\begin{cases} e_{rs} = \frac{E_0}{1+K_{BO}} & \text{si } \alpha = 0 \\ e_{rs} = 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

4.5.2 Erreur pour une entrée en rampe (deuxième colonne)

Pour une entrée en rampe, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}(V \cdot t \cdot u(t)) = \frac{V}{p^2}$$

Ainsi

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V}{p^2} \left(\frac{p^{\alpha_{BO} D(p)}}{p^{\alpha_{BO} D(p)} + K_{BO} N(p)} \right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{V}{p} \left(\frac{p^{\alpha_{BO} D(p)}}{p^{\alpha_{BO} D(p)} + K_{BO} N(p)} \right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{V p^{\alpha_{BO}-1}}{p^{\alpha_{BO}} + K_{BO}}$$

En fonction de la classe :



$$\begin{cases} e_{rs} = \infty \text{ si } \alpha = 0 \\ e_{rs} = \frac{V}{K_{BO}} \text{ si } \alpha = 1 \\ e_{rs} = 0 \text{ si } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

4.5.3 Erreur pour une entrée en accélération (troisième colonne)

Pour une entrée en rampe, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}(a \cdot t^2 \cdot u(t)) = \frac{2a}{p^3}$$

On montre de la même manière que :

$$\begin{cases} e_{rs} = \infty \text{ si } \alpha \leq 1 \\ e_{rs} = \frac{2a}{K_{BO}} \text{ si } \alpha = 2 \\ e_{rs} = 0 \text{ si } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

4.6 Bilan

On remarque que la diagonale présente des valeurs définies pour les erreurs, la partie basse des erreurs nulles et la partie haute des erreurs infinies (système non stable).