DS 5 - Correction

1. $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$ donc $\dfrac{\|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \simeq \dfrac{v.B}{E} \simeq \dfrac{v}{c}$ car $B \simeq \dfrac{E}{c}$

Donc si $v \ll c$, alors $\dfrac{\|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \ll 1$: force magnétique $\ll$ force électrique

2. pour un électron : $m_e \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ $\Rightarrow$ $i m_e \omega \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$ en complexes

alors $\underline{\vec{j}} = n_1(-e)\underline{\vec{v}} = \dfrac{n_1 e^2}{i m_e \omega}\underline{\vec{E}}$ pour les électrons

de même, $\vec{\underline{j}} = \dfrac{n_1 e^2}{i m_c \omega}\underline{\vec{E}}$ pour les ions

D'où $\underline{\gamma} = \dfrac{n_1 e^2}{i\omega}\left(\dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_c}\right)$ et comme $m_e \ll m_c$, $\dfrac{1}{m_e} \gg \dfrac{1}{m_c}$

Donc $\boxed{\underline{\gamma} \simeq \dfrac{n_1 e^2}{i m_e \omega}}$

3. $P_v = \vec{j}.\vec{E}$ (valeur instantanée), donc $\langle P_v \rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right)$

$= \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\right)$

Or, $\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^* = E_0^2$, donc $\langle P_v \rangle = \dfrac{E_0^2}{2}\mathrm{Re}(\underline{\gamma})$ et comme $\underline{\gamma}$ est imaginaire pur

($\vec{j}$ et $\vec{E}$ déphasés de $\pi/2$), $\mathrm{Re}(\underline{\gamma}) = 0$. Donc $\boxed{\langle P_v \rangle = 0}$

4. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \vec{\Delta}(\vec{E}) = -\vec{\Delta}(\vec{E})$ car $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$, le plasma étant électriquement neutre.

Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})) \overset{\text{M. Faraday}}{=} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

$= -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\right) \overset{\text{M. Ampère}}{=} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$= -\mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

$= -\dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}\underline{\gamma}\, i\omega\underline{\vec{E}} - \dfrac{1}{c^2}(i\omega)^2\underline{\vec{E}}$

$= -\dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}\dfrac{n_1 e^2}{\cancel{i} m_e \cancel{\omega}}\cancel{i\omega}\,\underline{\vec{E}} + \dfrac{1}{c^2}\omega^2\underline{\vec{E}}$

D'où $\boxed{\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{n_1 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2\right)\underline{\vec{E}}}$

5. On peut poser $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e}}}$ A.N : $\omega_p = 1,8 \cdot 10^7\ s^{-1}$ ($f_p \simeq 6$ MHz)

et alors $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \vec{E}$

6. On injecte dans l'équation précédente la forme de l'onde $\vec{E} = E_0\, e^{i(\omega t - k x)} \vec{u_y}$

ce qui donne, puisque $\vec{\Delta}(\vec{E}) = -k^2 \vec{E}$:

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

→ si $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$, donc k réel : le plasma est transparent (propagation sans atténuation)

→ si $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$, donc k imaginaire pur : pas de propagation (onde évanescente)

La fréquence utilisée par le satellite est largement supérieure à la fréquence de coupure (13,6 GHz vs 6 MHz) donc pas de problème, les ondes qu'il émet traversent l'ionosphère.

7. On reprend l'équation du mouvement d'un électron en y ajoutant le champ magnétique statique : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B_0}$

soit $-i m_e \omega \vec{v} = e\vec{E} + e\, \vec{v} \wedge (B_0 \vec{u_x})$

On pose ensuite $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (ce n'est pas le σ du 2.!)

et comme $\vec{j} = n(-e)\vec{v}$, $\vec{v} = \frac{-\vec{j}}{n e} = -\frac{\sigma \vec{E}}{n e}$, d'où :

$-\frac{i m_e \omega}{n e} \sigma \vec{E} = -e\vec{E} + \sigma \frac{e B_0}{n e} \vec{E} \wedge \vec{u_x}$ et on multiplie par $-\frac{n e}{m_e}$:

$-i\omega\sigma\vec{E} = -\underbrace{\frac{n e^2}{m_e}}_{\text{"}\varepsilon_0 \omega_p^2\text{"}} \vec{E} + \sigma \underbrace{\frac{e B_0}{m_e}}_{= \omega_c} \vec{E} \wedge \vec{u_x}$

d'où $(\varepsilon_0 \omega_p^2 - i\omega\sigma)\vec{E} = \omega_c \sigma \vec{E} \wedge \vec{u_x}$

enfin, $\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\omega t - k x)}$, d'où finalement

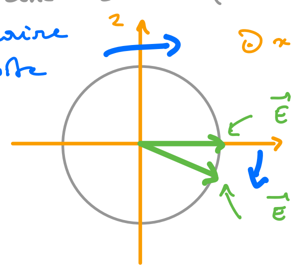
$$\boxed{(\varepsilon_0 \omega_p^2 - i\omega\sigma)\vec{E_0} = \omega_c \sigma \vec{E_0} \wedge \vec{u_x}}$$

8. $\varepsilon = +1$: $\underline{\vec{E_0}} = E_0 \left(\vec{u_y} + i\, \vec{u_z} \right)$

donc $\vec{E} = E_0 \left(\cos(\omega t)\, \vec{u_y} + \underbrace{\cos(\omega t + \pi/2)}_{-\sin(\omega t)}\, \vec{u_z} \right)$

circulaire droite

$\odot\, x$



convention : l'onde se dirige vers l'observateur

$\vec{E}$ à $t = 0$

sens de rotation de $\vec{E}$

$\vec{E}$ un peu après $t = 0$: composante z négative

9. $\underline{\vec{E_0}} \wedge \vec{u_x} = E_0 \left(\vec{u_y} + i \varepsilon \vec{u_z} \right) = E_0 \left(-\vec{u_z} + i \varepsilon \vec{u_y} \right)$

donc $\left(\varepsilon_0 \omega_p^2 - i \underline{\sigma} \omega \right) \cancel{E_0} \left(\vec{u_y} + i \varepsilon \vec{u_z} \right) = \underline{\sigma}\, \omega_c\, \cancel{E_0} \left(-\vec{u_z} + i \varepsilon \vec{u_y} \right)$

donc $\begin{cases} \varepsilon_0 \omega_p^2 - i \underline{\sigma} \omega = i \underline{\sigma} \varepsilon \omega_c \\ i \varepsilon \left(\varepsilon_0 \omega_p^2 - i \underline{\sigma} \omega \right) = - \underline{\sigma} \omega_c \end{cases}$ c'est la même égalité car $\varepsilon^2 = 1$

d'où $\boxed{\underline{\sigma} = \dfrac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i (\omega + \varepsilon \omega_c)}}$

c'est cohérent avec $\underline{\sigma} = \dfrac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i \omega}$ que l'on trouve en l'absence de champ $\vec{B_0}$. (auquel cas $\omega_c = 0$)

10. On reprend le calcul du 4), avant d'avoir remplacé $\underline{\sigma}$ par son expression :

$$-\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \underline{\sigma}\, i \omega\, \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \omega^2 \underline{\vec{E}}$$

D'après l'expression précédente de $\underline{\sigma}$, $\dfrac{\underline{\sigma}\, i \omega}{\varepsilon_0} = \dfrac{\omega_p^2}{1 + \varepsilon \frac{\omega_c}{\omega}}$

D'où $\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = \dfrac{1}{c^2} \left(-\omega^2 + \omega_p^2 \cdot \dfrac{1}{1 + \varepsilon \frac{\omega_c}{\omega}} \right) \underline{\vec{E}}$

et $\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = -\underline{k}^2 \underline{\vec{E}}$, donc :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \omega_p^2 \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\omega_c}{\omega}} \right)}$$

11. Le plasma sera transparent pour $\omega > \omega_+$, avec ω_+ qui vérifie :

$\omega^2 - \omega_p^2 \dfrac{1}{1 + \frac{\omega_c}{\omega}} = 0$, soit $\omega_p^2 - \omega^2 - \omega \omega_c = 0$, soit $\omega^2 + \omega_c \omega - \omega_p^2 = 0$

Solutions $\frac{1}{2} \left(-\omega_c +/- \sqrt{\omega_c^2 + 4 \omega_p^2} \right)$ et on garde la solution positive, donc :

$$\boxed{\omega_+ = -\frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4 \omega_p^2}}$$

A.N : $\omega_c = 8{,}8 \cdot 10^{6}\ s^{-1}$

$\omega_+ = 1{,}4 \cdot 10^{7}\ s^{-1}$

12. Même principe avec $\varepsilon = -1$. Plasma transparent pour $\omega > \omega_-$

Conduit à l'équation $\omega^2 - \omega_c \omega - \omega_p^2 = 0$

$$\omega_- = \frac{\omega_c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}$$

A.N : $\omega_- = 2{,}3 \cdot 10^7 \ s^{-1}$

13. Pour $\omega > \omega_-$, le plasma est transparent pour les deux polarisations, $\underline{k}_+$ et $\underline{k}_-$ sont réels.

$$\underline{k}_+^2 - \underline{k}_-^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega_p^2 \frac{1}{1+\frac{\omega_c}{\omega}} - \omega^2 - \omega_p^2 \frac{1}{1-\frac{\omega_c}{\omega}} + \omega^2\right)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1 - \frac{\omega_c}{\omega} - 1 - \frac{\omega_c}{\omega}}{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

Soit $$\boxed{\underline{k}_+^2 - \underline{k}_-^2 = \frac{-2\omega_p^2 \omega_c/\omega}{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$ < 0 car $\omega_c < \omega$ si $\omega > \omega_-$

Donc $k_- > k_+$ et comme $v_{\varphi -} = \frac{\omega}{k_-}$ et $v_{\varphi +} = \frac{\omega}{k_+}$, $\boxed{v_{\varphi +} > v_{\varphi -}}$

14. $\vec{\underline{E}}_{ry} = E_0 \vec{u_y} e^{i(\omega t - k x)} = \underline{\vec{E_0}} e^{i(\omega t - k x)}$ avec $\underline{E}_{0ry} = E_0 \vec{u_y}$

polarisée rectiligne (Oy)

Or, $\underline{\vec{E}}_{0cD} = E_0(\vec{u_y} + i\vec{u_z})$ et $\underline{\vec{E}}_{0cG} = E_0(\vec{u_y} - i\vec{u_z})$

circulaire droite — circulaire gauche

Donc $\underline{\vec{E}}_{0ry} = \underline{\vec{E}}_{0cD} + \underline{\vec{E}}_{0cG}$

l'onde polarisée rectiligne est la somme des ondes polarisée circulaire gauche et circulaire droite

15. Si $\omega < \omega_+$: aucune propagation (réflexion sur le plasma)

Si $\omega_+ < \omega < \omega_-$: propagat° dans le plasma d'une onde circulaire droite, réflexion d'une onde circulaire gauche

Si $\omega > \omega_-$: propagation des 2 composantes dans le plasma, mais avec des vitesses différentes $\Rightarrow$ rotation de la direction de polarisation