

La durée est de 4 heures

Les calculatrices sont **autorisées**

Problème 1 Caméra de contrôle

Pour diminuer le nombre de véhicules circulant dans le centre ville et réduire ainsi les embouteillages, la pollution et le bruit qu'ils engendrent, plusieurs grandes agglomérations (Londres, Singapour, Stockholm) utilisent un système de péage urbain.

Différentes technologies sont mises en oeuvre pour détecter les véhicules entrant dans la zone de circulation taxée. Le système londonien, appelé London Congestion Charge (mis en place en 2003) utilise un réseau de 500 caméras installées à chaque point permettant d'entrer ou de sortir de la zone payante. Les images obtenues sont ensuite analysées par un algorithme LAPI (Lecture Automatique des Plaques d'Immatriculation) qui génère une liste des véhicules ayant circulé dans le centre ville, ce qui déclenche la facturation d'une taxe.

Ces systèmes doivent être robustes, peu coûteux, ne nécessiter aucun réglage et être fonctionnels dans des conditions de luminosité très variées. Le modèle retenu (ci-contre) comporte deux caméras identiques : l'une enregistrant dans le domaine visible et l'autre dans le proche infrarouge grâce un filtre stoppant les radiations visibles. Un ensemble de diodes électroluminescentes (DEL) émettant des flashes de longueur d'onde respective 810 nm et 950 nm entoure les caméras et permet d'illuminer la plaque d'immatriculation.

DEL infrarouges Objectifs des caméras



caméra P362 de la société PIPS®

Les spécifications du constructeur sont les suivantes :

Le capteur CCD (Charge Coupled Device) de ces caméras est un rectangle de diagonale 1/4" (0,635 cm) et est découpé en 752 x 582 pixels (largeur x hauteur) ; les pixels sont des carrés tous identiques, de côté a .

Pour réduire le coût, les risques de panne et les réglages lors de l'installation, ces caméras ont une distance focale image f' fixe. Le constructeur propose différents modèles destinés à enregistrer les plaques d'immatriculation à une distance de mesure déterminée L .

Le tableau suivant résume les modèles disponibles :

Tableau 1

Modèle de caméra	1	2	3	4	5
Focale f'	35,0 mm	25,0 mm	16,0 mm	12,0 mm	8,00 mm
Distance de mesure L	20,0 m	14,5 m	9,0 m	7,0 m	4,5 m

La norme britannique concernant les plaques d'immatriculation est la suivante :

Les plaques doivent mesurer 110 mm de hauteur et 520 mm de largeur. Les caractères doivent avoir une hauteur de 79 mm et une largeur de 50 mm, l'épaisseur du trait étant fixée à 14 mm.



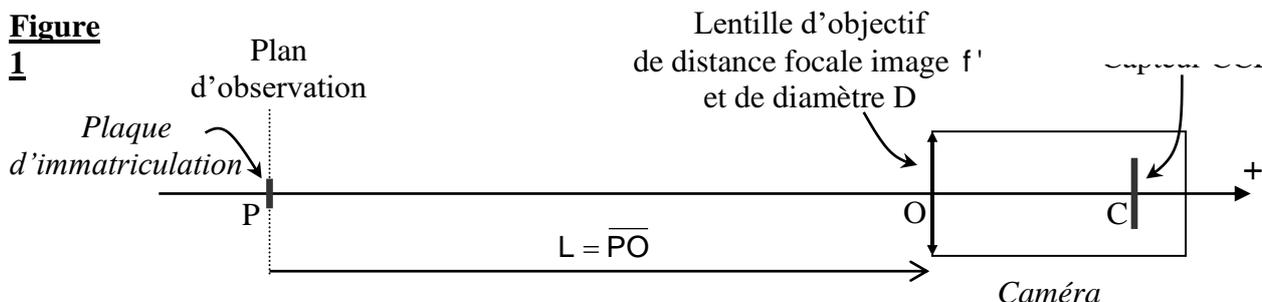
DIMENSIONNEMENT DES CAMÉRAS

Les caméras sont identiques et constituées d'une lentille d'objectif de distance focale image f' qui forme sur le capteur CCD une image de la plaque d'immatriculation.

La figure 1 ci-dessous illustre cette configuration (les échelles relatives ne sont pas respectées).

1. Donner la condition que doivent vérifier f' (distance focale image de la lentille) et PC (distance entre l'objet réel et son image réelle) pour que la formation de l'image soit possible.
Comment s'appelle la réalisation de l'image réelle d'un objet réel ?

Figure 1



2. Exprimer la distance \overline{OC} en fonction de $L = \overline{PO}$ et $f' = \overline{OF'}$.
Justifier pourquoi la lentille doit nécessairement être convergente.
3. Ecrire le grandissement γ en fonction de L et f' .
4. En tenant compte des valeurs numériques du Tableau 1 (page précédente), simplifier l'expression de \overline{OC} obtenue à la question 2. Commenter.
5. Simplifier de même l'expression de γ . Calculer la valeur numérique du grandissement γ pour ces cinq modèles de caméras (répondre avec 3 chiffres significatifs). Commenter.
Pour les questions suivantes, γ sera pris égal à la moyenne de ces cinq valeurs.
6. Déterminer la largeur et la hauteur du capteur CCD en millimètres (données page précédente).
En déduire la valeur numérique de la longueur a du côté d'un pixel de ce capteur.
7. En déduire les dimensions du champ de vue dans le plan d'observation.
Est-il suffisant d'installer une caméra par rue permettant d'accéder au centre ville ?
8. Déterminer la taille de l'image d'un des caractères de la plaque d'immatriculation sur le capteur CCD en micromètres, puis en pixels.
9. Le dimensionnement de la caméra est imposé par une valeur optimale de γ qui repose sur un compromis entre deux contraintes antagonistes : préciser lesquelles.
10. Quels problèmes se poseraient si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible ?
Quels sont les avantages à filmer une seconde image en infrarouge ?

PROFONDEUR DE CHAMP

Bien que ces caméras ne disposent pas de dispositif de mise au point (leur distance focale est fixe), il est néanmoins possible de visualiser des plaques d'immatriculation qui ne sont pas rigoureusement situées à la distance L spécifiée par le constructeur (cf. Tableau 1).

Le but de cette partie est de déterminer la profondeur de champ Z , c'est-à-dire la longueur de la zone de l'espace où l'objet peut-être placé afin que la caméra en fournisse une image considérée comme nette.

Le document-réponse « Optique », à rendre avec la copie, comporte différentes figures sur lesquelles un objet ponctuel est situé sur l'axe optique (les constructions ne sont pas à l'échelle et ont pour seul but d'illustrer le phénomène). Le diamètre de la lentille est $D = 1,00 \text{ cm}$.

Sur la première figure, l'objet est situé en P_0 , à la distance L spécifiée par le constructeur.

- 11.** Compléter cette figure en représentant le trajet des deux rayons lumineux issus de P_0 et frappant la lentille en deux points extérieurement diamétralement opposés. Représenter la position de l'image C_0 de ce point P_0 par la lentille d'objectif. (Un soin particulier est attendu dans la réalisation de la construction dont la démarche doit être rigoureusement justifiée.)

Le capteur CCD est positionné dans le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par C_0 . L'objet ponctuel P_1 est maintenant placé à une distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ de P_0 .

- 12.** Compléter la seconde figure du document-réponse en y représentant :
- le plan du capteur CCD (en reportant le point C_0 de la construction de la question **B1**)
 - le trajet des deux rayons lumineux issus de P_1 et frappant la lentille en deux points extérieurement diamétralement opposés. Son image est notée C_1 .

Ce faisceau ne forme pas une image ponctuelle sur le capteur mais un disque de diamètre $d_1 > 0$ qui doit être inférieur à la taille a d'un pixel pour que l'image soit nette : $0 < d_1 < a$.

- 13.** Montrer que le diamètre de la tache image, noté d_1 , peut s'exprimer sous la forme :

$$d_1 = \beta \frac{f' \Delta_1}{(L - f')(L - \Delta_1)}, \text{ où } \beta \text{ est un facteur à expliciter.}$$

- 14.** Compléter la troisième figure, dans le cas où $\overline{P_0P_2} = -D_2 < 0$ ($\Delta_2 > 0$ est une distance).

Le diamètre de la tache image peut alors s'exprimer sous la forme $d_2 = \beta \frac{f' \Delta_2}{(L - f')(L + \Delta_2)}$.

- 15.** Simplifier les expressions de d_1 et d_2 sachant que $f' \ll L$.

- 16.** Exprimer, en fonction de a , L , D et f' , les distances $\Delta_{1\text{lim}}$ et $\Delta_{2\text{lim}}$ telles que la tache image sur le capteur ait un diamètre égal à la taille d'un pixel.

Problème 2 interférence

On considère un système de deux fentes F_1 et F_2 très fines perpendiculaires au plan de la figure 15 ci-dessous. Elles sont distantes de $2a$ et de grande longueur. L'ensemble est éclairé par une source S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ placée au foyer objet d'une lentille convergente. L'observation de la figure d'interférences se fait sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale image f' .

On s'intéresse aux ondes reçues au point M d'ordonnée z sur l'écran et on suppose z et a très petits devant f' : $z \ll f'$ et $a \ll f'$.

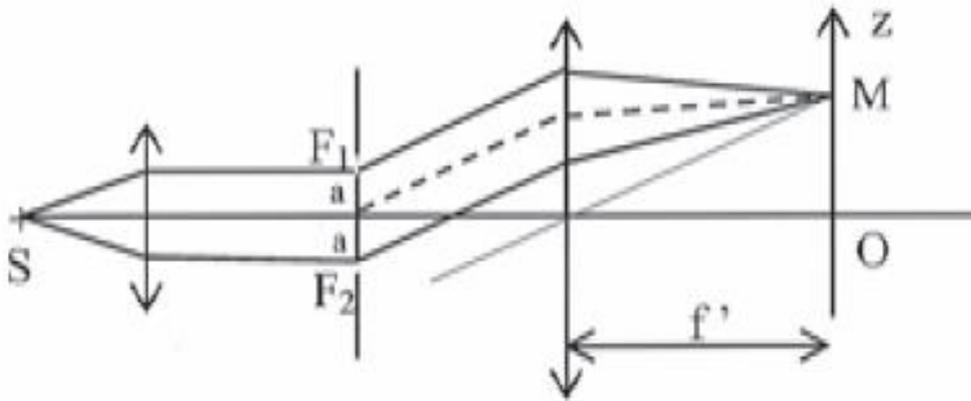


Figure 15

1. Déterminer le déphasage φ entre les deux ondes au point M en fonction de a , f' , λ et z .
2. Exprimer l'éclairement (intensité lumineuse) I résultant de l'interférence des deux ondes en fonction de I_0 (intensité lumineuse associée à une seule fente) et φ . Tracer l'allure de la courbe I en fonction de φ .

On ajoute une troisième fente F_0 au milieu des deux autres et identique à celles-ci.

3. Montrer que le nouvel éclairement peut se mettre sous la forme : $I = I_0 (1 + 2 \cos(\varphi))^2$.
4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

φ en rad	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	2π
I / I_0					

5. Tracer l'allure de la courbe I/I_0 en fonction de φ .

A partir du montage à trois fentes, on ajoute devant la fente centrale F_0 et parallèlement au plan des fentes, une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice $n = 1,5$.

L'épaisseur e étant très faible, on considèrera que le rayon lumineux qui traverse la lame, parcourt une distance e dans le verre, sans être dévié.

6. Montrer que si l'épaisseur de la lame est telle qu'elle induit un retard de phase de $\pi/2$ pour le rayon central, on retrouve une alternance régulière de franges brillantes et de franges sombres (pas nécessairement noires), contrairement à la question précédente.
7. Si on veut contrôler par cette méthode que la lame a bien l'épaisseur souhaitée $e = 0,3 \mu\text{m}$, quelle valeur faut-il choisir pour λ ?

Problème 3 Effet Faraday

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e , égale à $n_1 = 1,00 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_c , égale aussi à n_1 , l'ensemble est donc globalement neutre. La densité n_1 est supposée constante et uniforme.

On veut étudier dans ce milieu la propagation d'ondes de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}x)] \vec{u}_y$$

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et on supposera que les particules ne sont pas relativistes ($v \ll c$).

1. Montrer que les effets de la force magnétique de Lorentz sont négligeables devant les effets de la force électrique de Lorentz.

2. Etablir l'expression de la conductivité (complexe) $\underline{\gamma}$ du plasma en faisant intervenir m_e et de m_c (c'est à dire que l'on prend en compte la contribution des électrons et aussi celle des cations). Etant donné les valeurs numériques, justifier l'approximation :

$$\underline{\gamma} = \frac{n_1 e^2}{m_e i\omega}$$

3. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

4. Établir l'équation de propagation (pour le champ électrique) de l'onde dans le plasma, et en déduire la relation de dispersion.

5. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère.

6. Donner qualitativement le comportement du plasma dans les deux cas suivants :

- ω est inférieure à ω_p ;

- ω est supérieure à ω_p .

Le choix de la fréquence des ondes radars émises par le satellite Jason 2 ($f = 13,6 \text{ GHz}$) vous semble-t-il correct ?

On reprend la situation précédente en ajoutant un champ magnétique statique, indépendant de l'onde, \vec{B}_0 . L'expression du champ électrique est à priori de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}x)] \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} \vec{u}_z$$

On notera $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$ avec B_0 positif. On se place dans le cas $\omega > \omega_p$. On définit la pulsation cyclotron par :

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$$

7. En étudiant le mouvement d'un électron établir la relation vectorielle complexe entre les grandeurs $\varepsilon_0, \omega_p, \underline{\gamma}, \omega, \omega_c, \vec{u}_x$ et \vec{E}_0 (attention, ω_p garde la même expression que précédemment mais $\underline{\gamma}$ est modifiée) :

$$(\varepsilon_0 \omega_p^2 - i \underline{\gamma} \omega) \vec{E}_0 = \underline{\gamma} \omega_c (\vec{E}_0 \wedge \vec{u}_x)$$

On considère une onde de polarisation circulaire :

$$\vec{E}_0 = E_0 (\vec{u}_y + i \varepsilon \vec{u}_z) \quad \text{avec} \quad E_0 > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Si $\varepsilon = +1$, la polarisation est dite circulaire droite et si $\varepsilon = -1$, la polarisation est dite circulaire gauche.

8. Justifier le fait que $\varepsilon = +1$ correspond à la polarisation circulaire droite. On précisera la convention choisie (l'onde se dirige vers l'observateur ou l'onde s'éloigne de l'observateur).

9. Donner l'expression de $\underline{\gamma}$ en fonction de $\varepsilon_0, \omega_p, \omega, \omega_c$ et ε .

10. Donner l'expression de \underline{k}^2 en fonction de $\omega_p, \omega, \omega_c, c$ et ε .

11. Polarisation circulaire droite : selon les valeurs de ω , donner le comportement de l'onde. On pourra introduire une pulsation limite ω_+ . Donner la valeur numérique de ω_c dans le cas de l'ionosphère où B_0 est le champ magnétique terrestre $B_0 = 50\mu T$. Calculer, dans les mêmes conditions, la valeur numérique de ω_+ . L'onde associée à $\varepsilon = +1$ sera indiquée par (+).

12. Polarisation circulaire gauche : selon les valeurs de ω , donner le comportement de l'onde. On pourra introduire une pulsation limite ω_- . Donner la valeur numérique de ω_- dans le cas de l'ionosphère où B_0 est le champ magnétique terrestre $B_0 = 50\mu T$. L'onde associée à $\varepsilon = -1$ sera indiquée par (-).

13. Dans le domaine commun de propagation que vous préciserez, calculer la quantité $\underline{k}_+^2 - \underline{k}_-^2$ en fonction de $\omega_p, \omega_c, \omega$ et c . Laquelle des deux ondes a-t-elle la vitesse de phase la plus grande?

14. Montrer qu'une onde polarisée rectilignement suivant l'axe Oy se propageant selon \vec{u}_x peut se décomposer en deux ondes polarisées circulairement, l'une droite, l'autre gauche.

15. On envoie sur le plasma une onde polarisée rectilignement de pulsation ω quelconque.

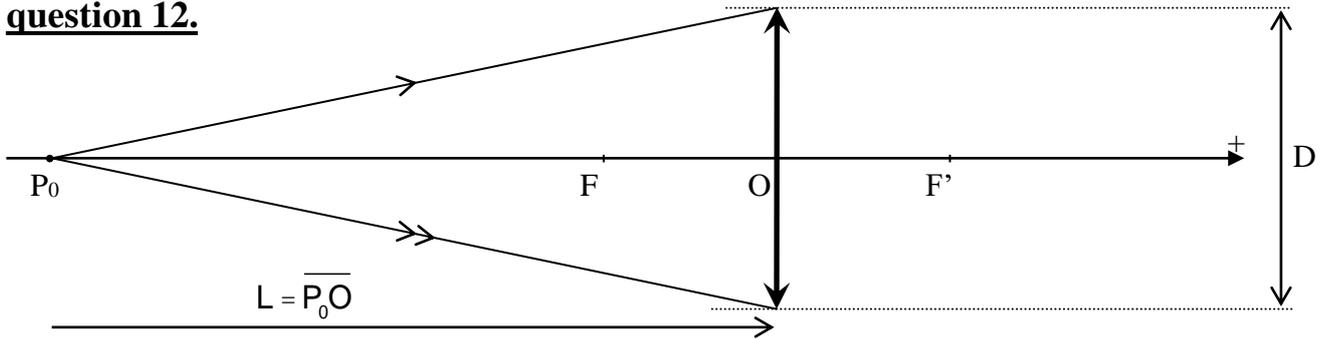
Que devient cette onde à l'interface vide / plasma? On discutera suivant la valeur de la pulsation.

On rappelle que $\vec{\text{rot}}[\vec{\text{rot}}(\vec{A})] = \vec{\text{grad}}[\text{div}(\vec{A})] - \Delta\vec{A}$

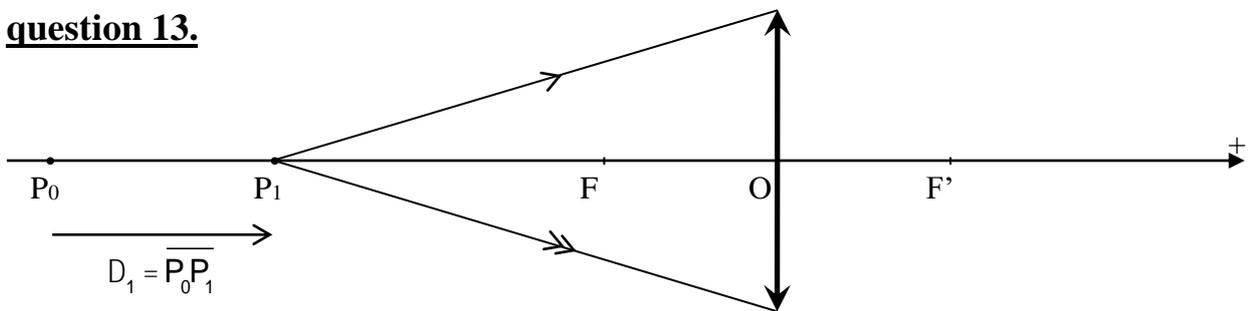
Données	
nombre d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol m}^{-1}$
charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
masse d'un électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
masse d'un proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Document-réponse « Optique », à compléter et à rendre avec la copie

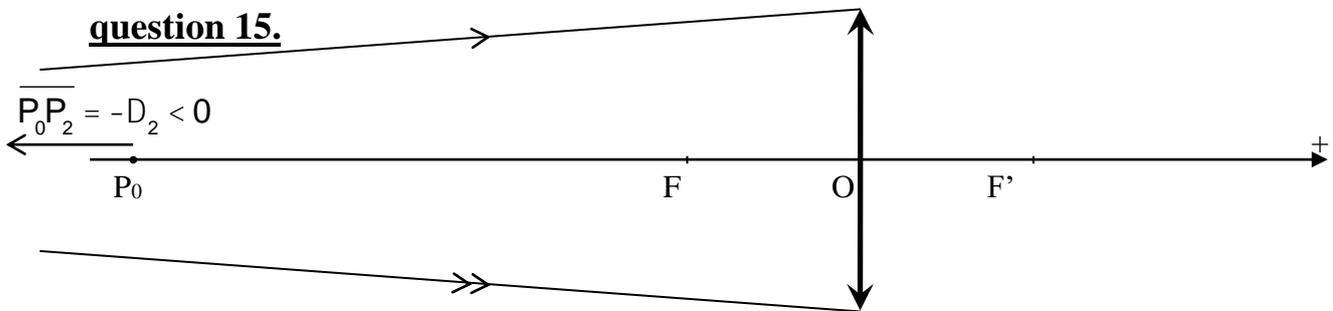
question 12.



question 13.



question 15.



Remarque : P_2 est en dehors de la figure