Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 18 : 3 au 7 février 2025

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que $u \in S(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $S(E)$. Montrer que $S(E)$ n'est pas stable par la loi $\circ$ (si $\dim E > 1$).
- ☐ Énoncer et démontrer la caractérisation des projecteurs orthogonaux par les projecteurs autoadjoints.
- ☐ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les sous-espaces propres de u sont en somme directe *(partie I.4 du chapitre 4)*. Soit $u \in S(E)$. Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
- ☐ Soit $u \in S(E)$. Montrer l'existence de $\lambda_{\min}$, plus petite valeur propre de u, et de $\lambda_{\max}$, plus grande valeur propre de u, puis montrer que $\lambda_{\min} = \min\limits_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$ et que $\lambda_{\max} = \max\limits_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$.
- ☐ Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- ☐ Énoncer les 4 théorèmes de réduction du programme. Voici ce qui est attendu :

Théorème. (CNS de diagonalisabilité.)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable, c'est-à-dire il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale ;
- $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$;
- $\dim(E) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$;
- le polynôme caractéristique χ_u est scindé et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$;
- il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples ;
- le polynôme minimal π_u est scindé à racines simples.

Théorème. (CNS de trigonalisabilité.)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable, c'est-à-dire il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure ;
- le polynôme caractéristique χ_u est scindé ;
- il existe un polynôme annulateur de u scindé ;
- le polynôme minimal π_u est scindé.

Théorème. (Réduction des isométries vectorielles.)
Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $u \in O(E)$;
- il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1×1 égaux à (1) ou (-1) et des blocs de taille 2×2 de type $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème spectral. (Réduction des endomorphismes autoadjoints.)
Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $u \in S(E)$;
- $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$;
- il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

NB : Cette semaine, des exercices de révision portant sur la réduction des endomorphismes pourront également être donnés.

Chapitre 20 : Endomorphismes autoadjoints

I Endomorphismes autoadjoints

I.1 Définition et premières propriétés

- endomorphisme autoadjoint. Notation $S(E)$. Exemple des homothéties.
- $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- si $u \in S(E)$ et si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

I.2 Matrices symétriques et endomorphismes autoadjoints

- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors $u \in S(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$.
- dimension de $S(E)$. L'ensemble $S(E)$ n'est pas stable par la loi $\circ$ (sauf si $\dim E = 1$).
- les endomorphismes autoadjoints sont parfois appelés endomorphismes symétriques.

I.3 Projecteurs orthogonaux

- $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un projecteur et est autoadjoint.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et si p est un projecteur, p est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est symétrique.

II Réduction des endomorphismes autoadjoints

II.1 Sous-espaces propres

- rappel : si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les sous-espaces propres de u sont en somme directe.
- si $u \in S(E)$, alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

II.2 Théorème spectral

- si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in S(E)$ si et seulement si E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.
- si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in S(E)$ si et seulement s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

II.3 Théorème spectral, version matricielle

- si A est une matrice symétrique réelle, alors A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

III Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

III.1 Calcul de $X^T AY$

- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X^T AY$ appartient à $\mathbb{R}$ (identifié à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$) et égal à $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$.
- si E_i désigne le vecteur colonne avec que des 0 sauf un 1 en i-ème position, alors $a_{i,j} = E_i^T AE_j$.

III.2 Définitions

- A est une matrice symétrique positive si A est symétrique et si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX \geqslant 0$. Notation $S_n^+(\mathbb{R})$.
- A est une matrice symétrique définie positive si A est symétrique et si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $X^T AX > 0$. Notation $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- u est un endomorphisme autoadjoint positif si $u \in S(E)$ et si : $\forall x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$. Notation $S^+(E)$.
- u est un endomorphisme autoadjoint défini positif si $u \in S(E)$ et si : $\forall x \in E\backslash\{0\}$, $\langle x, u(x)\rangle > 0$. Notation $S^{++}(E)$.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors $u \in S^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$.
- si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.3 Caractérisations par le spectre

- $u \in S^+(E)$ si et seulement si $u \in S(E)$ et toutes les valeurs propres de u sont positives.
- $u \in S^{++}(E)$ si et seulement si $u \in S(E)$ et toutes les valeurs propres de u sont strictement positives.
- $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et toutes les valeurs propres de A sont positives.
- $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.