Améliorer les performances des SLCI

1. Introduction

1.1. Dilemme stabilité – précision – rapidité

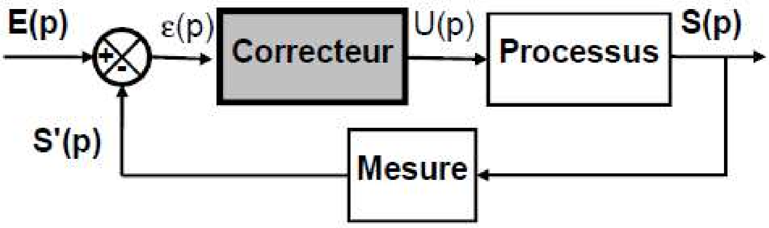
Une boucle d'asservissement répond à un besoin (garantir la position d'un mobile, sa vitesse en toutes circonstances, reproduire aussi fidèlement que possible une consigne, etc.). Les exigences permettant de quantifier ce besoin se traduisent par des performances attendues.

Ces performances et leurs niveaux sont consignés dans le Cahier des Charges Fonctionnelles (CdCF).

Un système très stable risque d'être lent et peu précis. Un système trop réactif sera rapide, mais risque de dépasser ou d'être instable. Les performances souhaitées ne peuvent pas toutes être optimales : il faut un **compromis** pour **garantir la stabilité, sans trop dégrader les performances.**

1.2. Le correcteur dans un système asservi

Le concepteur intègre ces contraintes dans ses calculs d'avant-projet en évaluant dans un premier temps les performances intrinsèques du système, puis en les améliorant par une correction ou compensation.



Le correcteur est programmé dans la carte de commande. Il est inséré dans la chaine directe, en sortie du comparateur, on parle de correction série. Il est peu couteux et facilement modifiable car il manipule des grandeurs de commande, c'est-à-dire à faible énergie. Son positionnement en amont du processus lui assure une influence conséquente sur le comportement global.

Même si le correcteur est le plus souvent programmé (en langage informatique) dans la carte de commande, il existe encore quelques systèmes avec des correcteurs analogiques construits avec des composants électroniques (notamment des Amplificateurs Opérationnels). On considère que les correcteurs numériques se comportent de manière "linéaire" si la fréquence d'échantillonnage du système est grande devant l'inverse de la constante de temps du système.

Le correcteur peut améliorer les performances, mais ne peut compenser des défauts majeurs du processus :

- Un retard (jeu, échantillonnage, …) ;
- Un actionnement sous dimensionné (s'il sature, impossible de gagner en rapidité par exemple) ;
- Des non-linéarités fortes (frottement sec par exemple, …).

Dans l'étude des SLCI, on traite un correcteur comme n'importe quelle fonction de transfert.

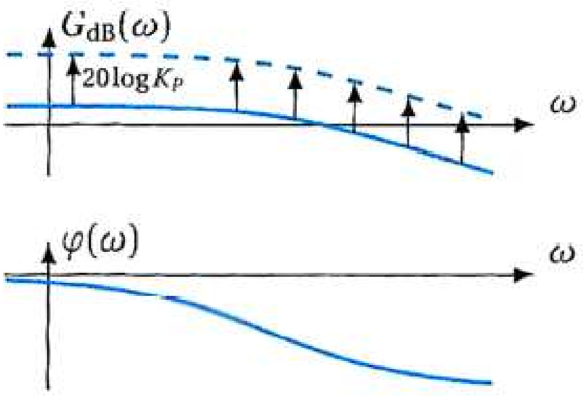
2. Correcteur à action Proportionnelle - P (courant)

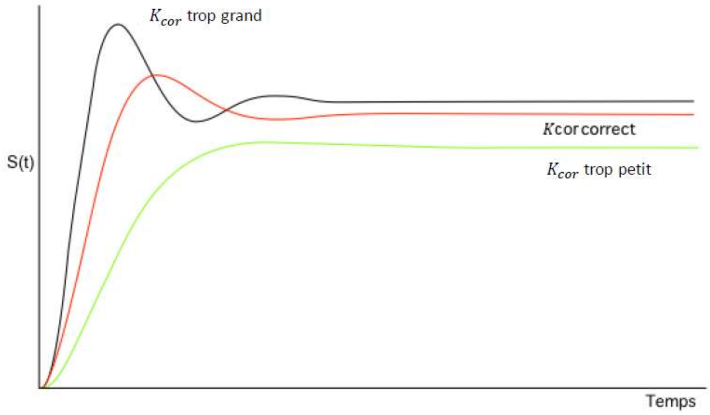
On amplifie la réaction du processus à un écart observé, le système se « déplace » plus rapidement. Cette action peut toutefois se renverser car une commande trop amplifiée peut rendre le système oscillant et donc moins rapide à converger.

Un correcteur proportionnel augmente le gain en boucle ouverte K_{BO}, et diminue les erreurs, sans les annuler.

Si on réagit trop fort à de petits écarts, en augmentant le gain, le système tend vers l'instabilité.

$\boldsymbol{C(p) = K_p}$	Le correcteur proportionnel corrige de manière instantanée ($K_p > 1$) : - **Il rend le système plus rapide** - **Il augmente les dépassements et peut réduire l'erreur** - **Il peut déstabiliser le système**





Effet sur le diagramme de Bode de la FTBO — Effet sur la réponse temporelle

Lors du réglage du gain K_p du correcteur proportionnel, on cherche à minimiser le temps de réponse, mais aussi à limiter les dépassements sur la réponse du système à un échelon (réponse indicielle).

Remarque : Sur le diagramme de Bode, on remarque qu'un correcteur proportionnel n'impacte que le gain et il ne peut que le déplacer sans modifier son allure. Un correcteur proportionnel permet donc de modifier les marges de stabilité (en modifiant par exemple la pulsation à $0dB$).

3. Correcteur à action Intégrale pure - I (peu courant)

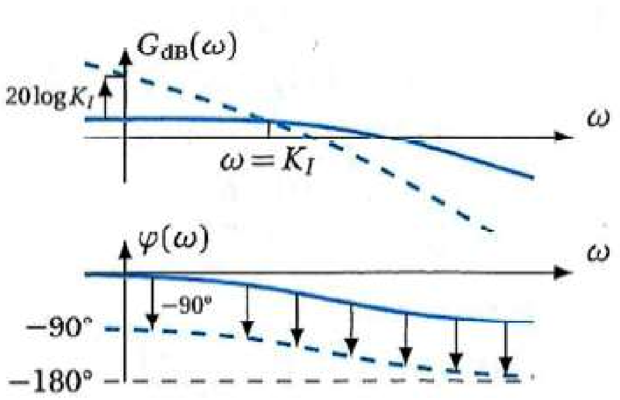
En augmentant la classe de la FTBO, on obtient une amélioration de la précision.

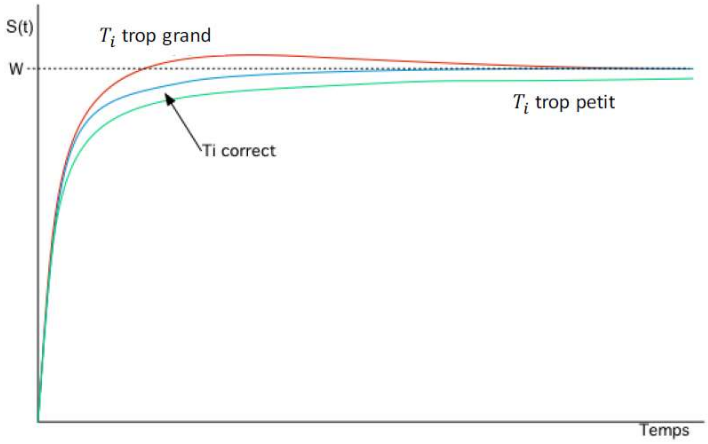
Le temps de réponse est largement augmenté, car la commande augmente lentement : il faut en effet attendre d'avoir intégré l'écart depuis un certain temps.

Un correcteur intégral pur :

- Diminue la phase de la FTBO de - 90° ;
- Amplifie les basses fréquences et diminue les hautes fréquences de la FTBO

$\boldsymbol{C(p) = \frac{K_i}{p} = \frac{1}{\tau_i . p}}$	Le correcteur intégral permet d'annuler l'erreur statique : - **Il réduit les dépassements et annule l'erreur statique** - **Il diminue la rapidité** - **Il peut déstabiliser le système ($\boldsymbol{M\varphi} \searrow$)**





Lors du réglage de la constante de temps K_i de l'action intégrale du correcteur, on cherche à atteindre la valeur finale recherchée (erreur statique nulle), sans rendre le système trop lent.

4. Correcteur à action Proportionnelle et Intégrale pure - PI (très courant)

L'action proportionnelle agit essentiellement au début du mouvement, lorsque l'action intégrale, plus lente, n'a pas encore réagi. Le système bénéficie alors de la rapidité d'une action proportionnelle, en amplifiant la réaction à un écart donné.

Ici aussi, en augmentant la classe de la FTBO, on obtient une amélioration de la précision.

On les retrouve généralement sous deux expressions (similaires) :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i}{p}\left(\frac{K_p}{K_i}p + 1\right) \qquad C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$$

Ce correcteur amplifie infiniment les basses fréquences (d'où la bonne précision, car une entrée constante est un signal basse fréquence).

Contrairement au correcteur intégral pur, le correcteur PI ne diminue plus la phase dans les hautes fréquences, ce qui évite de dégrader les marges (dans les hautes fréquences l'action est identique à celle d'un correcteur proportionnel).

Deux méthodes de réglages sont utilisées :

- <u>Pour une bonne stabilité :</u> Ce correcteur apportant une phase nulle en haute fréquence, l'idée est de placer la pulsation de cassure du correcteur **« loin à gauche » des zones où sont mesurées les marges de la FTBO**, pour ne pas les dégrader.
- <u>Pour une bonne rapidité :</u> Quand on cherche à optimiser le temps de réponse, une autre façon de régler le correcteur PI est de **faire disparaître la plus grande des constantes de temps de la FTBO**, qui est celle qui limite la rapidité du système (celle qui est associée au pôle dominant de la FTBO). Pour cela on égalise la constante de temps du correcteur et celle à compenser.

Dans le second cas, on parle de réglage par **compensation de pôles.** C'est-à-dire qu'on fait en sorte que le premier ordre inverse $\frac{K_p}{K_i}p + 1$ se simplifie avec le premier ordre le plus lent.

5. Correcteur à action Dérivée - D (irréel)

$\boldsymbol{C(p) = K_d.p}$

Ce correcteur théorique anticipe la réaction aux phénomènes lents :

- Il rend le système plus rapide
- Il réduit les dépassements et améliore la stabilité
- Il détériore la précision

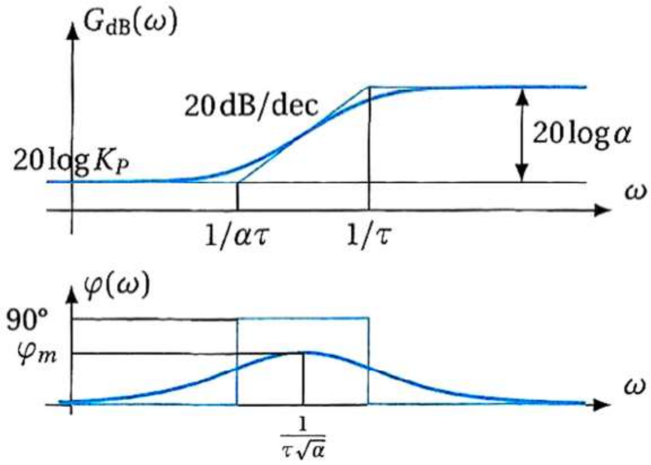
6. Correcteur à avance de phase (courant)

Ce correcteur est une manière physique d'implémenter un correcteur dérivé. Il « avance » la phase (il l'augmente) dans une zone de fréquence restreinte.

$$C(p) = K_{cor}\frac{1 + \alpha.\tau.p}{1 + \tau.p}$$

Avec $\boldsymbol{\alpha > 1}$, l'ajout de ce correcteur dans la boucle ouverte rend le système plus stable, plus rapide, et moins précis.

Si on place l'action de ce correcteur aux alentours de la pulsation de coupure à $0dB$ de la FTBO, la phase est augmentée donc on **améliore les marges de stabilité**. On a également une **meilleure rapidité**, car on augmente ω_{0d} . On utilise donc ce correcteur pour **stabiliser un système** ne possédant pas assez de marge de phase, ou pour **augmenter la rapidité** (via le gain) sans déstabiliser le système. Comme le correcteur dérivé, il **augmente les bruits haute fréquence**.



7. Correcteur proportionnel, intégral, dérivé – PID (très courant)

Le correcteur "dérivé" et le correcteur "intégral" concernent des domaines de fréquences très différents (basses fréquences pour l'intégral et hautes fréquences pour le dérivé), il est parfois judicieux d'associer les deux correcteurs en un seul. On obtient alors un correcteur PID qui cumule tous les avantages (P => rapidité, I => précision, D => stabilité), mais il est parfois délicat à placer, car chaque action peut améliorer ou détériorer le comportement.

En théorie, on souhaiterait utiliser un correcteur PID parfait du type :

$$C(p) = K_{cor}\left(1 + \frac{K_i}{p} + K_d.p\right)$$

Les effets des différentes actions du correcteur PID sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	Précision	**Stabilité**	**Rapidité**
P	↗	↘	↗
I	↗	↘	↘
D	↘	↗	↗

8. Exercices d'application

1.1 Réglage d'un gain

Soit le système de fonction de transfert en boucle ouverte définie par $H_{BO}(p) = \frac{K}{p(p+1)^2}$

Q.1. **Calculer l'erreur statique du système placé dans une boucle à retour unitaire pour une entrée échelon.**

La FTBO est de classe 1, pour une entrée échelon, l'erreur statique est nulle.

Q.2. **Déterminer la valeur du gain K qui permet d'obtenir une pulsation de coupure à $0dB$ égale à :**

$$\boldsymbol{\omega_{c0} = 2 \text{ rad/s}}$$

Par définition : $G\big(H_{BO}(j\omega)\big) = 20\log(K) - 20\log(\omega) - 40\log\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)$

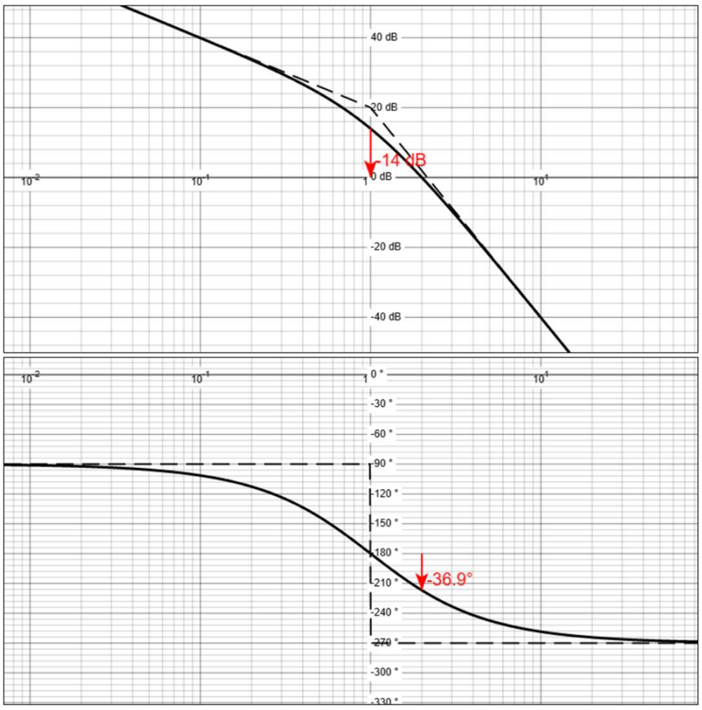
En particulier : $G\big(H_{BO}(j\omega_{c0})\big) = 0dB = 20\log(K) - 20\log(\omega_{c0}) - 40\log\left(\sqrt{1+\omega_{c0}^2}\right)$

D'où $20\log(K) = 20\log(\omega_{c0}) + 20\log(1+\omega_{c0}^2)$ et $\log(K) = \log(\omega_{c0}(1+\omega_{c0}^2))$

En passant à l'exponentielle il vient :

$$K = \omega_{c0}(1+\omega_{c0}^2) = 10$$

Q.3. **Tracer le diagramme de Bode du système en boucle ouverte avec le gain K déterminé précédemment.**



Q.4. **Déterminer la marge de gain et la marge de phase pour cette valeur de K et conclure sur la stabilité du système.**

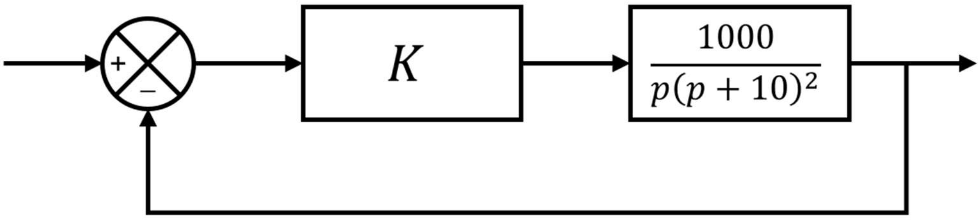
$$M_G = -14dB \text{ et } M_\varphi = -36{,}9°$$

Le système est instable.

1.2 Réglage d'une marge de phase

On considère un processus de fonction de transfert en boucle ouverte $H(p)=\frac{1000}{p(p+10)^2}$. Ce système est mis dans un asservissement à retour unitaire avec un correcteur proportionnel de gain K.

Q.1. **Donner le schéma-bloc du système asservi.**



Q.2. **Calculer la valeur du gain *K* qui assure au système une marge de phase de 45°.**

- La définition de la marge de phase donne :

$$M_\varphi = \arg\left(\frac{1000K}{j\omega(j\omega+10)^2}\right)+180$$

$$M_\varphi = \arg(1000K)-\arg(j\omega)+2\arg\left(\frac{1}{j\omega+10}\right)+180$$

$$M_\varphi = 0-90-2\arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)+180$$

En particulier, pour avoir une marge de phase de 45° :

$$45 = 90-2\arctan\left(\frac{\omega_{0d}}{10}\right) \Leftrightarrow \omega_{0dB}=10\tan\left(\frac{45}{2}\right)$$

- De plus, toujours pas définition :

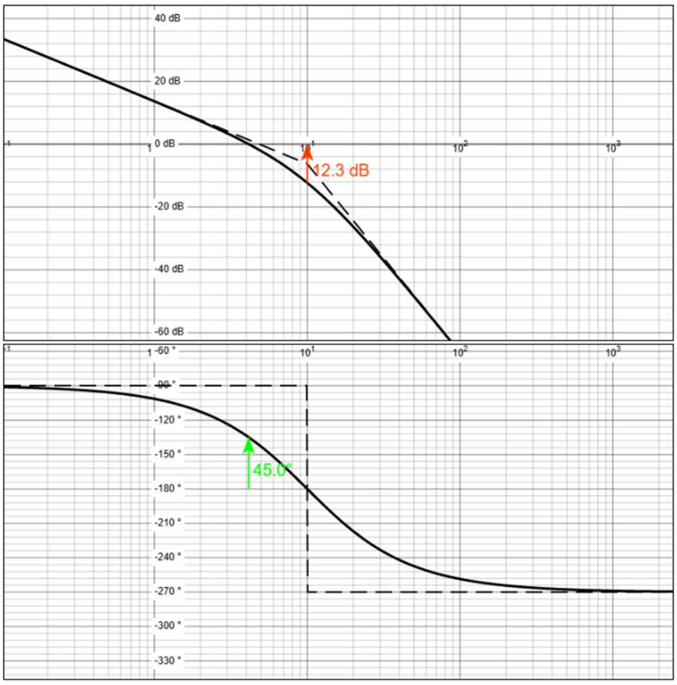
$$G\big(FTBO(j\omega_{0dB})\big)=0dB=20\log(K)+20\log(1000)-20\log(\omega_{0dB})-20\log\left(\omega_{0dB}^2+10^2\right)$$

Soit

$$20\log(1000K)=20\log\left(\omega_{0dB}\left(\omega_{0dB}^2+10^2\right)\right)\Leftrightarrow K=\frac{\omega_{0dB}(\omega_{0dB}^2+10^2)}{1000}$$

<u>Application numérique</u> :

On sait que $\tan\left(\frac{45}{2}\right)=\sqrt{2}-1$ d'où $K=2\big(3\sqrt{2}-4\big)=0{,}485$



Q.3. **La consigne est un signal échelon unitaire. Calculer l'erreur en régime permanent entre la consigne et la sortie du système.**

La FTBO est de classe 1, pour une entrée échelon, l'erreur statique est nulle.

Q.4. **Répondre à la même question si la consigne est une rampe de pente 1.**

La FTBO est de classe 1, pour une entrée en rampe, l'erreur statique vaut $e_{rs} = \frac{1}{10}$ (attention $H(p)$ n'et pas sous forme canonique).