Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 19 : 24 au 28 février 2025

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Rappeler la définition d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω. Montrer que $\varnothing \in \mathcal{A}$, que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable, par réunion ou intersection finie et par différence.
- ☐ Montrer que : si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète sur Ω, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- ☐ Énoncer et démontrer le théorème de continuité croissante,
  puis son corollaire : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$.
- ☐ Montrer la propriété de sous-additivité, pour une famille finie puis dénombrable $(A_i)_{i\in I}$.
- ☐ Citer (avec hypothèses, bien entendu !) toutes les formules du cours permettant de calculer la probabilité d'une union ou d'une intersection d'événements.

Chapitre 21 : Espaces probabilisés

I Quelques rappels

I.1 Dénombrement

- cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit cartésien. Condition nécessaire sur $\mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(F)$ pour l'existence d'une injection (d'une surjection, d'une bijection) de E dans F.
- nombre de p-uplets, nombre de p-uplets d'éléments distincts, nombre de permutations, nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini.
- propriétés des coefficients binomiaux.

I.2 Ensembles dénombrables

- ensembles dénombrables, ensembles au plus dénombrables. Exemples : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ... Contre-exemples : $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ...
- produit cartésien fini d'ensembles au plus dénombrables, réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
- support d'une famille sommable.

II Espaces probabilisés

II.1 Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$

- exemples d'univers infinis non dénombrables.
- tribu : définition, exemples, propriétés.

- événement élémentaire, événements incompatibles (ou disjoints).
- système complet d'événements.

II.2 Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: définition (dont la propriété de σ-additivité).
- distribution de probabilités discrète $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$: famille sommable de nombres réels positifs de somme 1.
- si Ω est au plus dénombrable, alors une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'identifie, via $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, à une distribution de probabilités discrète.
- exemple de la probabilité uniforme sur Ω fini, non-existence d'une probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.

II.3 Calculer avec une probabilité $\mathbb{P}$

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, probabilité d'une réunion finie d'événements deux à deux incompatibles, probabilité de $\mathbb{P}(A \cap B)$ *(la formule du crible pour $n \geqslant 3$ est hors-programme)*, probabilité du complémentaire.
- théorème de continuité croissante, de continuité décroissante.
- propriété de sous-σ-additivité.
- événement négligeable, presque sûr.
- système quasi-complet d'événements. Formule des probabilités totales.

III Probabilités conditionnelles

III.1 Définition

- probabilité conditionnelle de B sachant A : définition, notation $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$.
- si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et si $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Conséquence : les formules de la partie II.3 s'étendent à une probabilité conditionnelle.

III.2 Trois formules de probabilité

- formule des probabilités composées.
- formule des probabilités totales.
- formule de Bayes.

IV Indépendance d'événements

IV.1 Couple d'événements indépendants

- A et B indépendants : définition par $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Équivalence, lorsque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, avec $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
- l'indépendance de A et B est équivalente à celle de A et $\overline{B}$, à celle de $\overline{A}$ et B et à celle de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

IV.2 Famille d'événements indépendants

- famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements (mutuellement) indépendants.
- si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse.
- si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$. La réciproque est fausse.
- si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, c'est aussi le cas pour $B_1, \ldots, B_n$, où pour tout i, l'événement B_i vaut A_i ou $\overline{A_i}$.

IV.3 Bilan : probabilité d'une union, d'une intersection

- bilan de toutes les formules permettant de calculer la probabilité d'une union d'événements.
- bilan de toutes les formules permettant de calculer la probabilité d'une intersection d'événements.

<u>À suivre la semaine prochaine</u> :
Variables aléatoires discrètes