

Régler la commande des SLCI asservis à l'aide d'un correcteur proportionnel

1. Lecture des marges et correction proportionnelle

Q.1. Indiquer, en justifiant la réponse, à quelle fonction de transfert correspondent les diagrammes de Bode de la figure ci-dessous.

Sur les tracés asymptotiques, on observe :

- une asymptote de la courbe de gain pour les basses pulsations avec une pente de -20 dB/décade et qui coupe l'axe des 0 dB à $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$;
- une asymptote de la courbe de phase, pour les basses pulsations, qui est horizontale et a pour valeur -90° ;
- deux pulsations de cassure $\omega_1 = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ qui correspondent à deux constantes de temps $\tau_1 = 10\text{s}$ et $\tau_2 = 0,5\text{s}$;
- des pentes de -40 dB/décade et -60 dB/décade pour les deux dernières asymptotes de la courbe de gain ;
- un asymptote de la courbe de phase, pour les hautes pulsations, qui est horizontale et a pour valeur -270° .

On peut donc par identification, proposer la fonction de transfert suivante : $F(p) = \frac{1}{p(1+10p)(1+0,5p)}$

On reconnaît la FTBO du système non corrigé.

Q.2. Déterminer graphiquement les marges de gain et de phase du système décrit précédemment dans le cas où $C = 1$.

Dans le cas où $C = 1$, le diagramme de Bode de la FTBO corrigée est exactement celui donné dans l'énoncé.

Graphiquement, on relève : $M_\varphi = 10^\circ$ et $M_G = 7$ dB.

Q.3. Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40° . Déterminer graphiquement la plus grande valeur de C permettant de vérifier ce cahier des charges.

Réglage de la marge de phase :

On souhaite imposer une marge de phase de 40° , soit : $M_\varphi > 40^\circ \Rightarrow \varphi(\omega_{0dB}) > -180 + 40 = -140^\circ$

À la pulsation où la phase du système non corrigé vaut -140° , on relève graphiquement le gain correspondant : $G_{dB}(\omega = 0,11) = 16$ dB. Il faut donc traduire verticalement la courbe de gain de -16 dB.

On a alors : $C < 10^{-\frac{16}{20}} \approx 0,16$

Réglage de la marge de gain :

On souhaite imposer une marge de gain de 12 dB, soit : $M_G > 12\text{dB} \Rightarrow G_{dB}(\omega_{-18^\circ}) < -12\text{dB}$

La courbe de phase n'est pas modifiée par l'ajout d'un correcteur proportionnel. La pulsation ω_{-180° du système corrigé sera donc inchangée par rapport à celle du système non corrigé, c'est-à-dire $\omega_{-180^\circ} = 0,45 \text{ rad. s}^{-1}$.

À cette pulsation ω_{-180° , on relève graphiquement sur le diagramme de Bode de la FTBO non corrigé, le gain correspondant :

$G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) = -7 \text{ dB}$. Il faut donc traduire verticalement la courbe de gain de -5 dB afin d'assurer $G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) > -12 \text{ dB}$.

On a alors : $C < 10^{-\frac{5}{20}} \approx 0,56$

La valeur maximale de C permettant de satisfaire simultanément les deux critères imposés est : $C = 0,16$

Q.4. Indiquer, en le justifiant, la courbe qui correspond au système non corrigé et la courbe qui correspond au système corrigé.

La réponse indicielle qui comporte des oscillations de plus grandes amplitudes et fréquences correspond au système non corrigé.

En effet, en utilisant un correcteur proportionnel dont le gain est < 1 , on a amélioré la stabilité du système.

2. Réglage d'une marge de gain

Q.1. Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.

Graphiquement on relève : $M_G = 28 \text{ dB}$ et $M_\varphi = 78^\circ$

Des marges de stabilité positives indiquent que le système est stable. On peut même préciser qu'il est suffisamment stable au regard des niveaux des critères habituellement utilisés.

Q.2. Déterminer la valeur de K_p permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12 \text{ dB}$.

La courbe de phase n'est pas modifiée par l'ajout d'un correcteur proportionnel. La pulsation ω_{-180° du système corrigé sera donc inchangée.

On relève graphiquement sur le diagramme de Bode de la FTBO non corrigée, la valeur $K_{p \text{ BB}} \approx 16 \text{ dB}$ avec laquelle il faut faire traduire verticalement la courbe de gain afin d'assurer une marge de gain de 12 dB .

On a alors :

$$K_p \approx 10^{\frac{16}{20}} \approx 66,3$$

Q.3. Déterminer la nouvelle marge de phase du système.

En traduisant la courbe de gain de $+16 \text{ dB}$ vers le haut, on modifie la pulsation de coupure $\omega_{0 \text{ dB}}$. La pulsation de coupure $\omega'_{0 \text{ dB}}$ du système corrigé correspond à la pulsation qui assure un gain $G_{dB}(\omega) = -16 \text{ dB}$ pour le système non corrigé. On relève graphiquement la valeur de la phase pour cette valeur $\omega'_{0 \text{ dB}}$: $\varphi(\omega'_{0 \text{ dB}}) = -140^\circ$

Ce qui correspond, pour le système corrigé, à une marge de phase : $M_\varphi = 40^\circ$.



Q.4. Déterminer l'erreur en régime permanent du système corrigé pour une consigne indicielle (échelon unitaire).

Le diagramme de Bode de $F(p)$, compte tenu de l'asymptote de la courbe de gain pour les basses pulsations, permet d'affirmer que la classe de la FTBO corrigée $K_p F(p)$ est de classe = 1 (pente de -20dB/décade). L'erreur en régime permanent, vis-à-vis d'une consigne en échelon, est donc nulle.

Régler la commande des SLCI asservis à l'aide d'un correcteur à avance de phase

Q.5. Identifier la fonction de transfert en boucle ouverte à partir du tracé de son diagramme de Bode.

La phase commence à -90° , il y a donc un intégrateur, ensuite elle passe à -180° , on en déduit qu'il y a un premier ordre de pulsation de coupure 0,3. Il y a ensuite une augmentation de la phase qui devrait aller jusqu'à $+90^\circ$ mais une diminution de -180° intervient avant que le tracé réel n'ait le temps d'atteindre la valeur asymptotique ; on en déduit qu'il y a un premier ordre inverse puis un second ordre à racine double réelle (pas de résonance au niveau du gain).

$$FTBO(p) = \frac{K}{p} \left(1 + \frac{p}{0,3}\right) \frac{1}{1 + \frac{p}{200}} \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{2000}\right)^2}$$

De plus pour $\omega = 0,01$, le gain vaut 50dB, on en déduit $20 \log(K) = 20 \log(0,01) + 50$ soit $K = 10^{\frac{48}{20}} = 251$.

Q.6. Par lecture du diagramme de Bode de la FTBO non corrigée, justifier que la valeur de ω_{0dB} de la FTBO non corrigée peut être déterminée à partir d'une fonction en boucle ouverte simplifiée que l'on donnera.

Sur le tracé de Bode, on observe que la pulsation ω_{0dB} est comprise entre 1 et 2 rad. s^{-1} . Les pulsations $\omega_1 = 198 \text{ rad. s}^{-1}$ et $\omega_3 = 2410 \text{ rad. s}^{-1}$ sont relativement éloignées de ces valeurs, on peut donc travailler avec la FTBO simplifiée suivante :

$$FTBO(p) \approx \frac{K}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)}$$

Q.7. Déterminer cette valeur de ω_{0dB} par le calcul, puis la marge de phase correspondante. Valider graphiquement l'approximation faite. Conclure.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } |FTBO(j\omega_{0dB})| = 1 &\Rightarrow K = \sqrt{\omega_{0dB}^2 + \left(\frac{\omega_{0dB}^2}{\omega_2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{\omega_{0dB}^4}{\omega_2^2} + \omega_{0dB}^2 - K^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{X^2}{\omega_2^2} + X - K^2 = 0 \end{aligned}$$

Les racine de ce polynôme sont

$$\left\{ \begin{aligned} X_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{K^2}{\omega_2^2}}}{\frac{2}{\omega_2^2}} \\ &\begin{cases} X_1 = 1,455 \\ X_2 = -1,545 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Seul X_1 est physiquement possible, donc $\omega_{0dB} = \sqrt{X_1} = 1,2 \text{ rad. s}^{-1}$

A cette pulsation, la phase vaut $\varphi(\omega_{0dB}) = \arg(FTBO(j\omega_{0dB})) = -\arg\left(j\omega_{0dB} - \frac{\omega_{0dB}^2}{\omega_2}\right)$

$$= - \left(\arctan \left(\frac{\omega_{0dB}}{\frac{\omega_2}{\omega_{0dB}}} \right) + 180 \right) = - \left(\arctan \left(\frac{\omega_2}{\omega_{0dB}} \right) + 180 \right)$$

$$= -166^\circ$$

Donc $M_\phi = 180 - 166 = 14^\circ$ ce qui se vérifie sur le diagramme de Bode et inférieur à la limite imposé par le CdC.

Q.8. Déterminer graphiquement la marge de gain. Conclure.

Graphiquement $M_G = 115 \text{ dB}$, ce qui est très supérieur à la limite imposé par le CdC.

Q.9. Déterminer les valeurs de K_p , a et T_d pour atteindre une marge de phase de 60° .

Pour ω_{0dB} , on souhaite que le correcteur augmente la phase de $60 - 14 = 46^\circ$, soit : $\sin(46^\circ) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = \frac{1+\sin(46^\circ)}{1-\sin(46^\circ)} = 6,13$

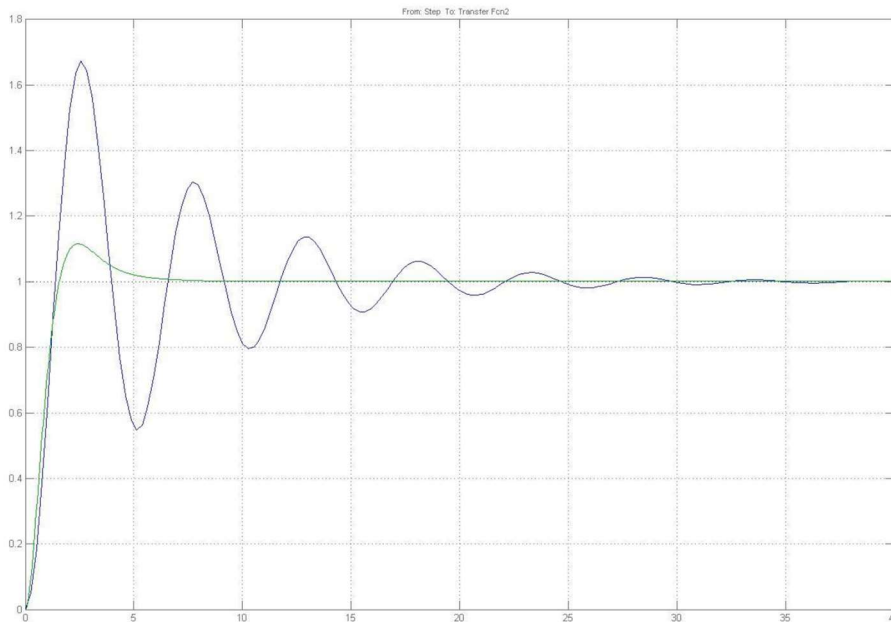
L'action du correcteur doit être centrée sur ω_{0dB} , donc $\omega_{0d} = \frac{1}{T_d a \sqrt{a}} \Rightarrow T_d = 0,34 \text{ s}$

Afin de faire en sorte que ω_{0dB} ne soit pas modifiée par ce réglage de correcteur, on choisit K_p tel que le gain du correcteur à ω_{0dB} soit égal à 1 :

$$|C(j\omega_{0dB})| = 1 \Rightarrow K_p \frac{\sqrt{1 + (aT_d\omega_{0dB})^2}}{\sqrt{1 + (T_d\omega_{0dB})^2}} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{\sqrt{1 + (T_d\omega_{0dB})^2}}{\sqrt{1 + (aT_d\omega_{0dB})^2}} = 0,4$$

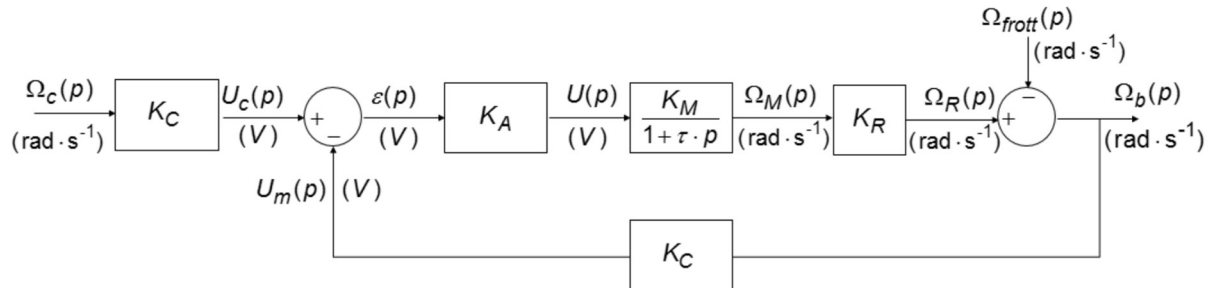
Q.10. Vérifier la validité du cahier des charges.

Tous les critères sont respectés ! Voici pour information la réponse initiale et corrigée pour une entrée en échelon :



Robot de peinture industriel

Q.1. Proposer un schéma-bloc représentant l'asservissement étudié. Préciser les grandeurs physiques entre les blocs et leurs unités.



Pour que $\varepsilon(p)$ l'image de l'erreur soit nulle lorsque l'erreur est nulle, il est impératif que les images de la consigne et de la sortie soient proportionnelles, respectivement à la consigne et à la sortie, avec le même coefficient de proportionnalité.

$$\text{Donc : } \frac{U_c(p)}{\Omega(p)} = K_C$$

Ainsi le système est correctement asservi (ce qui ne veut pas dire précis) ...

Q.2. Déterminer, dans le cas où les frottements sont négligés, la fonction de transfert en poursuite $\frac{\Omega_b(p)}{\Omega_c(p)}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme caractéristique d'un premier ordre dont on donnera les paramètres caractéristiques. Faire les applications numériques.

$$\frac{\Omega_b(p)}{\Omega_c(p)} = K_C \frac{K_A \frac{K_M}{1 + \tau p} K_R}{1 + K_A \frac{K_M}{1 + \tau p} K_R K_C} = \frac{K_A K_M K_R K_C}{1 + K_A K_M K_R K_C} \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1 + K_A K_M K_R K_C} p}$$

On trouve bien la forme caractéristique d'un système du premier ordre de :

$$\text{- gain statique : } K' = \frac{K_A K_M K_R K_C}{1 + K_A K_M K_R K_C} = 0,782$$

$$\text{- constante de temps : } \tau' = \frac{\tau}{1 + K_A K_M K_R K_C} = 4,35 \times 10^{-2} s$$

$$\text{On remarque aussi que } FTBO = \frac{K_A K_M K_C K_R}{1 + \tau p}$$

$$\text{On peut alors identifier } K_{BO} = K_A K_M K_R K_C = 3,6$$

Q.3. Évaluer la stabilité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.

Tous les coefficients du polynôme caractéristique sont de même signe, le système est donc stable.

$$|H(j\omega_{0dB})| = 1 \Rightarrow K_{BO} = \sqrt{1 + \tau\omega_{0dB}^2} \Rightarrow \omega_{0dB} = \frac{\sqrt{K_{BO}^2 - 1}}{\tau} = 17,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Calcul de M_φ :

$$M_\varphi = 180^\circ + \arg(H(j\omega_{0dB})) = 180^\circ - \arctan(\tau\omega_{0dB}) = \pi - \arctan(3,46) = 106^\circ$$

Q.4. Évaluer la rapidité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.

$$t_{5\%} = 3\tau' = 0,13 \text{ s} < 0,5 \text{ s}$$

Le critère de rapidité du cahier des charges est donc satisfait.

Q.5. Évaluer la précision pour une consigne en échelon et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.

La FTBO est de classe 0, on a donc : $e_{rs} = \frac{1}{1+K_{BO}} = 0,22 > 1\%$

Le critère de précision du cahier des charges n'est donc pas satisfait.

Q.6. Indiquer l'influence de la valeur de K_A sur les performances du système.

Avoir un $K_A > 1$ améliore la précision et la rapidité mais dégrade la stabilité.

Q.7. Le système est-il sensible aux perturbations lorsque $\omega_{frott} \neq 0$?

Oui, car la fonction de transfert en amont de la perturbation est de classe nulle.

Q.8. Déterminer l'ordre ainsi que l'expression de la fonction de transfert en poursuite.

$$\frac{\Omega_b(p)}{\Omega_c(p)} = K_C \frac{K_A \frac{K_M}{p(1+\tau p)} K_R}{1 + K_A \frac{K_M}{p(1+\tau p)} K_R K_R} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_A K_M K_R K_C} p + \frac{\tau}{K_A K_M K_R K_C} p^2}$$

Avec donc :

$$- \omega_{0BF} = \sqrt{\frac{K_A K_M K_R K_C}{\tau}} = 4,24 \text{ rad. s}^{-1}$$

$$- \xi_{BF} = \frac{1}{2\sqrt{\tau K_A K_M K_R K_C}} = 0,6$$

On remarque aussi que $FTBO = \frac{K_A K_M K_R K_C}{p(1+\tau p)}$

Q.9. Évaluer la stabilité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.

$$|H(j\omega)| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{\tau^2 \omega^4 + \omega^2}} = \frac{K_{BO}}{\omega \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{K_{BO}}{\omega_{0dB} \sqrt{\tau^2 \omega_{0dB}^2 + 1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \tau^2 \omega_{0dB}^4 + \omega_{0dB}^2 - K_{BO}^2 = 0, \text{ soit en posant } X = \omega_{0dB}^2$$

$$\tau^2 X^2 + X - K_{BO}^2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4\tau^2 K_{BO}^2$$

$$X = \frac{\sqrt{1+4\tau^2 K_{BO}^2} - 1}{2\tau^2} \text{ (seul la valeur positive est physiquement possible)}$$

$$\omega_{0dB} = \sqrt{X} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\tau^2 K_{BO}^2} - 1}{2\tau^2}} = 3,07 \text{ rad. s}^{-1}$$

$$M_\varphi = \pi + \arg\left(\frac{K}{j\omega_{0d} (1 + j\tau\omega_{0dB})}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega_{0dB})$$

$$M_\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega_{0dB})$$

$$M_\varphi = 58,5^\circ$$

Cette fois la marge de gain n'est plus respectée.

Q.10. Évaluer la précision pour une consigne en échelon et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.

La FTBO est maintenant de classe 1, l'erreur est donc nulle, le système est donc précis vis-à-vis d'une consigne en échelon.

Q.11. Évaluer la rapidité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.

Avec $\omega_{0BF} = 4,24 \text{ rad. s}^{-1}$ et $\xi_{BF} = 0,6$ et à partir de l'abaque du temps de réponse on en déduit que :

$$t_{5\%} \cdot \omega_{0BF} = 5 \Rightarrow t_{5\%} = 1,2s > 0,5s$$

Le critère de rapidité du cahier des charges n'est donc pas satisfait avec ce correcteur.

Q.12. Le système est-il sensible aux perturbations lorsque $\omega_{frott} \neq 0$?

La fonction de transfert en amont de la perturbation est maintenant de classe 1, le système reste précis même avec une perturbation en échelon.

Q.13. Conclusion.

Le correcteur intégral a amélioré la précision, tout en dégradant la stabilité et la rapidité.