Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 21 : 10 au 14 mars 2025

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Donner un exemple d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui n'appartient pas à L^1. On montrera que la loi de X est bien une loi de probabilité et que X n'admet pas d'espérance finie.
- ☐ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$ (égalités dans $[0, +\infty]$).
- ☐ Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $X \in L^1$ et calculer $\mathbb{E}(X)$. Montrer que $X \in L^2$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.
- ☐ Soient $X, Y \in L^2$. Rappeler la définition de $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Énoncer et montrer la formule de Koenig-Huygens pour la covariance, puis développer $\mathbb{V}(X+Y)$.
- ☐ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X_1 \in L^2$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
    a) Justifier que $\frac{S_n}{n} \in L^2$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)$.
    b) En déduire la loi faible des grands nombres.

Chapitre 21 : Espaces probabilisés

Révisions.

Chapitre 22 : Variables aléatoires discrètes

Révisions.

Chapitre 23 : Espérance et variance

Les variables aléatoires sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

I Espérance

I.1 Définitions

- définition dans le cas où $X(\Omega)$ est fini, dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que X est d'espérance finie si la famille $(k\mathbb{P}(X=k))_{k\in X(\Omega)}$ est sommable. Notation $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ou $X \in L^1$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k)$.
- si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

I.2 Espérance des lois usuelles

- si X suit la loi certaine égale à a, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- si $X \sim U([\![1,n]\!])$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1+n}{2}$.
- si $X \sim B(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$. Ainsi $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
- si $X \sim B(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.
- si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $X \in L^1$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
- si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X \in L^1$ et $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

I.3 Formule de transfert

- $f(X) \in L^1$ si et seulement si $(f(k)\mathbb{P}(X=k))_{k\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)} f(k)\mathbb{P}(X=k)$.

I.4 Propriétés de l'espérance

- linéarité de l'espérance. Variable centrée. Si $X \in L^1$, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- positivité et croissance de l'espérance.
- inégalité triangulaire.
- si $|X| \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.
- si X et Y admettent une espérance finie et sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Extension au cas de n variables.

II Variance

Les variables aléatoires sont désormais supposées à valeurs réelles.

II.1 Moment d'ordre 2

- on dit que $X \in L^2$ si X^2 admet une espérance finie.
- inégalité de Cauchy-Schwarz : si $X \in L^2$ et si $Y \in L^2$, alors $XY \in L^1$. De plus, $|\mathbb{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$.
- si $X \in L^2$, alors $X \in L^1$.
- l'ensemble $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, inclus dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

II.2 Variance et écart-type

- si $X \in L^2$, alors X admet une variance finie définie par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)$. Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
- pour tout $X \in L^2$, $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. De plus, $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.
- formule de Koenig-Huygens : si $X \in L^2$, alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

II.3 Variance des lois usuelles

- si X suit une loi certaine, alors $\mathbb{V}(X) = 0$.
- si $X \sim U(⟦1, n⟧)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
- si $X \sim B(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.
- si $X \sim B(n, p)$, alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
- si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $X \in L^2$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X \in L^2$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

II.4 Propriétés de la variance

- si $X \in L^2$, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
- variable aléatoire centrée réduite. $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

II.5 Covariance

- si $X \in L^2$ et $Y \in L^2$, alors la covariance de X et de Y est le nombre réel $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big)$.
- formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- si $X \in L^2$ et $Y \in L^2$, alors $X + Y \in L^2$ et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$. Extension au cas de n variables.
- on dit que X et Y sont décorrélées si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Dans ce cas, $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Extension au cas de n variables.
- si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées. La réciproque est fausse.
- l'application covariance est une forme bilinéaire symétrique positive (mais non définie) sur L^2.

III Inégalités de concentration

III.1 Inégalité de Markov

- inégalité de Markov pour une variable aléatoire $X \in L^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

III.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

- inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire $X \in L^2$.

III.3 Loi faible des grands nombres

- énoncé de la loi faible des grands nombres pour une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d. telles que $X_1 \in L^2$.

IV Fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

IV.1 Définition

- fonction génératrice $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$.
- la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Elle converge normalement sur $[-1, 1]$. Ainsi, G_X est définie et continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
- la loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- $X \in L^1$ si et seulement si G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.
- $X \in L^2$ si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

IV.2 Fonctions génératrices des lois usuelles

- fonctions génératrices à savoir calculer rapidement : lois de Bernoulli, lois binomiales, lois géométriques, lois de Poisson.

IV.3 Somme de variables aléatoires indépendantes

- si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes (et à valeurs dans $\mathbb{N}$), alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.