TD physique 23

Physique statistique

Exercice 1

Le fonctionnement d'un laser repose sur l'émission stimulée de photons entre deux niveaux d'énergie (du néon par exemple) E_1 et E_2 (avec $E_1 < E_2$. Cela nécessite que le niveau E_2 soit plus peuplé (donc plus probable) que le niveau E_1.

1. Le laser considéré a une longueur d'onde (dans le vide) de $633nm$. Calculer, en Joules et en eV, l'écart entre les deux niveaux d'énergie. On rappelle que l'énergie d'un photon est $E = h\nu$, où ν est sa fréquence.
2. Exprimer le rapport des probabilités p_2/p_1. Que devient-il dans les cas « basse température » et « haute température » ? Définir et calculer la température T_C avec laquelle il faut comparer T.
3. Calculer p_2/p_1 pour $T = 300K$. Est-il possible, à l'équilibre à une température T, d'avoir $p_2/p_1 > 1$?

Exercice 2

Le moment magnétique associé au spin d'un électron $\vec{m} = m_z\vec{e}_z$ peut avoir deux états : $m_z = +/-\ \mu_B$ où $\mu_B = e\hbar/2m_e$ est appelé magnéton de Bohr. N électrons sont placés dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ d'intensité 10 Tesla. Les N électrons sont considérés comme des particules indépendantes, pour les applications numériques on prendra $N = N_A$.

1. Vérifier, à partir de l'expression qui en est donnée, la dimension de μ_B.
2. Donner les expressions puis les valeurs numériques des 2 niveaux d'énergie possibles pour un électron.
3. Calculer numériquement la température $T_C = \mu_B B/k_B$ et donner sa signification physique.
4. Retrouver l'expression de l'énergie moyenne pour un électron à une température T.
5. Calculer l'énergie moyenne pour les températures $T_C/2$, T_C et $2T_C$, pour un électron puis pour N électrons.
6. Donner l'expression de la capacité thermique associée à un électron, puis à N électrons.
7. Calculer numériquement la capacité thermique par mole pour les températures $T_C/2$, T_C et $2T_C$. Est-ce du même ordre de grandeur que la capacité thermique de l'eau (liquide) aux températures usuelles ?
8. Calculer la fluctuation relative d'énergie $\sigma(E)/\langle E\rangle$ associée à un électron, puis à N électrons. Commenter.

Exercice 3

On considère un système dont les N atomes peuvent occuper 3 niveaux d'énergie, $E_1 = -\varepsilon$, $E_2 = 0$ et $E_3 = +\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) à la température T.

1. Calculer les nombres moyens d'atomes $\langle N_1\rangle$, $\langle N_2\rangle$ et $\langle N_3\rangle$ dans les 3 états. Commenter les limites basse et haute température.
2. Calculer l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ d'un atome.
3. Tracer son évolution en fonction de la température et commenter ce résultat.
4. Calculer la capacité thermique et tracer son évolution évolution en fonction de la température.

Exercice 4

Montrer que le maximum de la capacité thermique d'un système à deux niveaux est obtenu pour une température qui vérifie $ch(x) = xsh(x)$ avec $x = \varepsilon/k_BT$. En utilisant le calcul numérique (dichotomie par exemple), vérifier que cela conduit à $T = 0,833\ T_C$ (avec $T_C = \varepsilon/k_B$).

Exercice 5

Considérons des spins indépendants et discernables soumis à un champ magnétique. Ils peuvent être soit parallèles (ce qui signifie ici que c'est parallèle et dans le même sens) au champ, dans l'état $|\uparrow>$ d'énergie $-\mu_B$B, soit antiparallèles (sens opposé) au champ, dans l'état $|\downarrow\rangle$ d'énergie μ_BB, ou μ_B est le magnéton de bohr et B l'intensité du champ magnétique.

1) Exprimer la fonction z de partition pour un spin.

2) Quelle est la probabilité de trouver le spin parallèle au champ B ? Discuter des limites à basse et haute températures.

3) Quels sont les états accessibles pour deux spins et leur énergie ? Et pour trois spins ? Donner les valeurs des facteurs de dégénérescence associés aux différentes énergies.

4) Calculer Z(2spins) de deux manières.

5) Faire de même pour Z(3 spins).

6) Calculer l'énergie moyenne associée (pour 2 spins et pour 3 spins). Si l'on cherchait à obtenir le plus directement possible ce dernier résultat, quelle serait la démarche la plus simple ?

Exercice 6

On définit la mobilité d'un type de particules dans un certain milieu comme le coefficient de proportionnalité entre une force subie par les particules et la vitesse limite atteinte sous l'effet de cette force : $\vec{v}_{\text{lim}} = \mu\vec{f}$. On note U l'énergie potentielle dont dérive cette force.

A l'équilibre, deux effets se compensent : un flux de particules ϕ_f dans le même sens que $\vec{f}$ associé au déplacement des particules sous l'action de $\vec{f}$ et un flux de particules ϕ_D en sens opposé associé à la diffusion de particules du fait d'un gradient de la concentration n_V en particules.

On considère une situation 1D avec $\vec{f} = -f\vec{e}_x$ ($f > 0$ constante), les particules sont entre $x = 0$ et $x = +\infty$.

1) Faire un schéma en indiquant les sens de $\vec{f}$, $\vec{v}_{lim}$, $gr\vec{a}d(U)$ et $gr\vec{a}d(n_V)$.

2) Déterminer $n_V(x)$. On notera $n_0 = n_V(x = 0)$.

3) Donner l'expression du flux de particules ϕ_f en précisant l'orientation de la surface pour qu'il soit positif.

4) Donner l'expression du flux de particules ϕ_D en précisant l'orientation de la surface pour qu'il soit positif.

On donne la loi de Fick relative à la diffusion de particules : $\vec{j}_n = -Dgr\vec{a}d(n_v)$.

5) En déduire la relation d'Einstein $\mathrm{D} = \mu \mathrm{k_B T}$.

6) En admettant que l'on puisse mesurer μ et D, expliquer pourquoi cette relation a permis de mesurer le nombre d'Avogadro.

Exercice 7

On s'intéresse à la distribution des vitesses dans un gaz parfait à une température T donnée. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) = (\frac{\pi}{a})^{1/2}$ et $\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2) = \frac{\pi^{1/2}}{4a^{3/2}}$ (ce second résultat pouvant se déduire du premier avec une intégration par parties).

1. On commence avec un modèle 1D : déterminer la probabilité pour qu'une particule de masse m ait une vitesse selon (Ox) comprise entre v_x et $v_x + dv_x$.
2. On se place maintenant en 3D. Montrer que la probabilité pour une particule de masse m d'avoir une vitesse v à dv près s'écrit :

$$p(v, dv) = (2\pi k_B T/m)^{-3/2} \, 4\pi v^2 exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right) dv$$

3. En déduire les expressions de la vitesse la plus probable, de la vitesse moyenne et de la vitesse quadratique moyenne pour une particule de masse m à une température T donnée.
4. Faire l'application numérique à 300K pour O_2, H_2 et N_2.

Exercice 8

On considère un ensemble de N atomes placés aux nœuds d'un réseau cristallin (on les considérera donc comme des particules indépendantes discernables). Ils possèdent un moment magnétique permanent, dont la projection sur une axe (Oz) quelconque est quantifiée : $m_z = g\mu_B\, j$ où g et μ_B sont des constantes, et j un entier pouvant varier entre $-J$ et $+J$. On impose au cristal un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'un atome (du fait de son moment magnétique) dans le champ B.
2. Montrer que la fonction de partition pour un atome du cristal s'écrit, avec $x = \beta g\mu_B B$:
$$z = \left(\frac{sh(x(J+1/2))}{sh(x/2)}\right)$$
3. En déduire que l'énergie moyenne du cristal plongé dans le champ magnétique vaut :
$$\langle E\rangle = -Ng\mu_B B\left((J+1/2)\coth(x(J+1/2)) - 1/2\coth(x/2)\right)$$
4. En déduire la valeur moyenne du moment magnétique total $\langle\vec{m}\rangle$.
5. Vérifier que dans le cas limites basse température le moment magnétique total obtenu est le même qu'en considérant que tous les atomes ont leur moment magnétique « complètement aligné sur le champ $\vec{B}$ », i.e $j = J$.
6. Montrer que dans le cas limites haute température $\langle\vec{m}\rangle$ est proportionnel à $\vec{B}/T$ (loi de Curie). On donne $coth(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$ pour $x << 1$.

Exercice 9

1. Expliquer brièvement pourquoi la molécule d'eau est polaire. Donner un ordre de grandeur de son moment dipolaire.
2. On définit la polarisabilité α d'un milieu par la relation $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$. Quelle est la dimension de α ?

Des molécules d'eau de moment dipolaire $\vec{p_0}$ et à une température T fixée sont soumises à un champ électrique $\vec{E}$, constant et uniforme, selon $\vec{e_x}$ ($\vec{E} = E\vec{e_x}$).

3. Quel est l'effet du champ sur une molécule d'eau ? Qu'en est-il si l'on tient compte de l'agitation thermique ?
4. Montrer que la valeur moyenne de la projection (sur la direction du champ électrique) du moment dipolaire d'une molécule d'eau s'écrit, en posant $x = \frac{p_0 E}{k_B T}$:
$$\langle p_z\rangle = p_0\left(coth(x) - \frac{1}{x}\right)$$
5. Commenter (déterminer $\langle p_z\rangle$) les cas haute température et basse température. On donne $coth(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$ pour $x << 1$.
6. On se place dans le cas haute température.. Calculer la polarisabilité due à l'orientation des molécules d'eau pour T = 300 K. Donner, toujours à 300 K, un ordre de grandeur du champ à partir duquel $x << 1$ n'est plus vérifié. (on rappelle $k_B = 1,38\cdot 10^{-23} J.K^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 8,85\cdot 10^{-12}$ SI)