Exercice 1

Le fonctionnement d'un laser repose sur l'émission stimulée de photons entre deux niveaux d'énergie (du néon par exemple) E_1 et E_2 (avec $E_1 < E_2$. Cela nécessite que le niveau E_2 soit plus peuplé (donc plus probable) que le niveau E_1.

1. Le laser considéré a une longueur d'onde (dans le vide) de $633nm$. Calculer, en Joules et en eV, l'écart entre les deux niveaux d'énergie. On rappelle que l'énergie d'un photon est $E = h\nu$, où ν est sa fréquence.

2. Exprimer le rapport des probabilités p_2/p_1. Que devient-il dans les cas « basse température » et « haute température » ? Définir et calculer la température T_C avec laquelle il faut comparer T.

3. Calculer p_2/p_1 pour $T = 300K$. Est-il possible, à l'équilibre à une température T, d'avoir $p_2/p_1 > 1$?

1. $E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ et $\Delta E = E_2 - E_1 = E_{photon}$

A.N : $\Delta E = 3,14 \cdot 10^{-19}$ J $= 1,96$ eV

2. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1/Z \; e^{-E_2/k_BT}}{1/Z \; e^{-E_1/k_BT}}$ Donc $\boxed{\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{(E_2-E_1)}{k_BT}}}$

BT : $k_BT << \Delta E \Rightarrow \frac{\Delta E}{k_BT} >> 1 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \to 0$: $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$

HT : $k_BT >> \Delta E \Rightarrow \frac{\Delta E}{k_BT} << 1 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \to 1$: $p_1 = p_2 = 0,5$

On peut poser $T_c = \frac{\Delta E}{k_B}$ et écrire $\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{T_c}{T}}$

BT : $T << T_c$ et HT : $T >> T_c$

A.N : $T_c \simeq 22700$ K.

3. Pour $T = 300$ K, $\frac{p_2}{p_1} = 1,3 \cdot 10^{-33}$

$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{\Delta E}{k_BT}}$ avec $\frac{\Delta E}{k_BT} > 0$, donc il n'est pas possible d'avoir $\frac{p_2}{p_1} > 1$.

Exercice 2

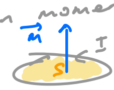
Le moment magnétique associé au spin d'un électron $\vec{m} = m_z \vec{e}_z$ peut avoir deux états : $m_z = +/- \ \mu_B$ où $\mu_B = e\hbar/2m_e$ est appelé magnéton de Bohr. N électrons sont placés dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ d'intensité 10 Tesla. Les N électrons sont comme des particules indépendantes), pour les applications numériques on prendra $N = N_A$.

1. Vérifier, à partir de l'expression qui en est donnée, la dimension de μ_B.
2. Donner les expressions puis les valeurs numériques des 2 niveaux d'énergie possibles pour un électron.
3. Calculer numériquement la température $T_C = \mu_B B / k_B$ et donner sa signification physique.
4. Retrouver l'expression de l'énergie moyenne pour un électron à une température T.
5. Calculer l'énergie moyenne pour les températures $T_C/2$, T_C et $2T_C$, pour un électron puis pour N électrons.
6. Donner l'expression de la capacité thermique associée à un électron, puis à N électrons.
7. Calculer numériquement la capacité thermique par mole pour les températures $T_C/2$, T_C et $2T_C$. Est-ce du même ordre de grandeur que la capacité thermique de l'eau (liquide) aux températures usuelles ?
8. Calculer la fluctuation relative d'énergie $\sigma(E)/\langle E \rangle$ associée à un électron, puis à N électrons. Commenter.

1. $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ $\hbar$ a la dimension d'une action, donc $J \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ (on le retrouve avec $E = h\nu$).

Donc μ_B est en $\dfrac{C \cdot \cancel{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-1}}{\cancel{kg}} = A \cdot m^2$

C'est bien la dimension d'un moment magnétique (pour une boucle de courant, $m = I \cdot S$



)

2. $e_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_z B = +/- \ \mu_B B$.

On a donc $E_1 = -\mu_B B$ et $E_2 = +\mu_B B$ (ainsi $E_1 < E_2$)

A.N : $\mu_B = 9{,}3 \cdot 10^{-24}\ A \cdot m^2$ et $\varepsilon = \mu_B B = 9{,}3 \cdot 10^{-23}\ J$ ($5{,}8 \cdot 10^{-4}\ eV$)

3. $T_C = \dfrac{\mu_B B}{k_B}$ A.N : $T_C = 6{,}7\ K$ C'est la température "critique", qui fait la transition entre les cas HT et BT.

4. $Z = e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon} = 2\,\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)$ en notant $\varepsilon = \mu_B B$ et $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$

et $\langle E \rangle = -\dfrac{1}{Z}\dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = -\dfrac{1}{\cancel{2}\,\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)} \cdot \cancel{2}\,\mathrm{sh}(\beta\varepsilon) \cdot \varepsilon$

Soit $\boxed{\langle E \rangle = -\varepsilon\, \mathrm{th}(\beta\varepsilon)}$

5. $T_C = \dfrac{\varepsilon}{k_B}$ donc $\beta\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{k_B T} = \dfrac{T_C}{T} \Rightarrow \langle E \rangle = -\varepsilon\, \mathrm{th}(T_C/T)$

A.N : $T = T_C/2 \Rightarrow \mathrm{th}(T_C/T) = \mathrm{th}(2) = 0{,}96 \Rightarrow \langle E \rangle = -8{,}7 \cdot 10^{-23}\ J$

$T = T_C \Rightarrow \mathrm{th}(T_C/T) = \mathrm{th}(1) = 0{,}76 \Rightarrow \langle E \rangle = -6{,}9 \cdot 10^{-23}\ J$

$T = 2T_C \Rightarrow \mathrm{th}(T_C/T) = \mathrm{th}(1/2) = 0{,}46 \Rightarrow \langle E \rangle = -4{,}2 \cdot 10^{-23}\ J$

Pour $N = N_A$ électrons (1 mole), on a respectivement -52 ; -41 et -25 J.

6. $C = \dfrac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \dfrac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta}{\partial T}$

On, $\dfrac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = -\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \dfrac{1}{ch^2(\beta\varepsilon)} = \dfrac{-\varepsilon^2}{ch^2(\beta\varepsilon)}$

et $\dfrac{\partial \beta}{\partial T} = \dfrac{\partial (1/k_B T)}{\partial T} = -\dfrac{1}{k_B T^2}$

Donc $C = \dfrac{\varepsilon^2}{k_B T^2 ch^2(\beta\varepsilon)}$ soit $\boxed{C = k_B \dfrac{(\beta\varepsilon)^2}{ch^2(\beta\varepsilon)}}$ pour un électron

Pour N électrons, on multiplie par N : $\boxed{C_{tot} = N k_B \dfrac{(\beta\varepsilon)^2}{ch^2(\beta\varepsilon)}}$

7. La capacité thermique par mole s'écrit :

$C_m = \dfrac{C_{tot}}{n} = \dfrac{C_{tot}}{N/N_A} = N_A \dfrac{C_{tot}}{N} \Rightarrow C_m = \underbrace{N_A k_B}_{R} \dfrac{(\beta\varepsilon)^2}{ch^2(\beta\varepsilon)}$ soit $\boxed{C_m = R \dfrac{(\beta\varepsilon)^2}{ch^2(\beta\varepsilon)}}$

A.N : $T = T_c/2$: $C_m = 2{,}35 \ J.k^{-1}$

$T = T_c$: $C_m = 3{,}5 \ J.k^{-1}$

$T = 2T_c$: $C_m = 1{,}65 \ J.k^{-1}$

8. On utilise le théorème de fluctuation - dissipation $var(E) = k_B T^2 C$

donc $\dfrac{\sigma(E)}{|\langle E \rangle|} = \dfrac{T\sqrt{k_B C}}{|\langle E \rangle|}$

D'où, pour un électron : $\dfrac{\sigma(E)}{|\langle E \rangle|} = \dfrac{T\sqrt{k_B^2 (\beta\varepsilon)^2 / ch^2(\beta\varepsilon)}}{\varepsilon \, th(\beta\varepsilon)}$

$= \dfrac{k_B T \ \beta \cancel{\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon} \ th(\beta\varepsilon) \cdot ch^2(\beta\varepsilon)} = \dfrac{1}{sh(\beta\varepsilon) \cdot ch(\beta\varepsilon)}$ car $k_B T \beta = 1$

Pour N électrons : $\dfrac{\sigma(E_{tot})}{|\langle E_{tot} \rangle|} = \dfrac{T\sqrt{k_B C_{tot}}}{|\langle E_{tot} \rangle|} = \dfrac{T\sqrt{k_B N C}}{N|\langle E \rangle|} = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \dfrac{\sigma(E)}{|\langle E \rangle|}$

On voit que, par rapport au cas d'une particule, les fluctuations relatives sont divisées par $\sqrt{N}$ pour N particules.

Exercice 3

On considère un système dont les N atomes peuvent occuper 3 niveaux d'énergie, $E_1 = -\varepsilon$, $E_2 = 0$ et $E_3 = +\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ à la température T.

1. Calculer les nombres moyens d'atomes $\langle N_1 \rangle$, $\langle N_2 \rangle$ et $\langle N_3 \rangle$ dans les 3 états. Commenter les limites basse et haute température.
2. Calculer l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ d'un atome.
3. Tracer son évolution en fonction de la température et commenter ce résultat.
4. Calculer la capacité thermique et tracer son évolution évolution en fonction de la température.

1. $p_1 = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_1} = \frac{1}{Z} e^{\beta \varepsilon}$

$p_2 = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_2} = \frac{1}{Z}$

$p_3 = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_3} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \varepsilon}$

avec $Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3}$

$= e^{\beta \varepsilon} + 1 + e^{-\beta \varepsilon}$

$= 1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)$

Puis $\langle N_1 \rangle = p_1 N$, d'où $\boxed{\langle N_1 \rangle = \frac{N e^{\beta \varepsilon}}{1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)}}$

De même, $\boxed{\langle N_2 \rangle = \frac{N}{1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)}}$

$\boxed{\langle N_3 \rangle = \frac{N e^{-\beta \varepsilon}}{1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)}}$

BT : $\langle N_1 \rangle = N$ et $\langle N_2 \rangle = \langle N_3 \rangle = 0$

HT : $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = \langle N_3 \rangle = \frac{N}{3}$

2. Pour un atome : $\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)} \cdot 2 \varepsilon\, \mathrm{sh}(\beta \varepsilon)$

D'où $\boxed{\langle E \rangle = \frac{-2 \varepsilon\, \mathrm{sh}(\beta \varepsilon)}{1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)}}$

Pour les N atomes, c'est la même chose $\times N$.

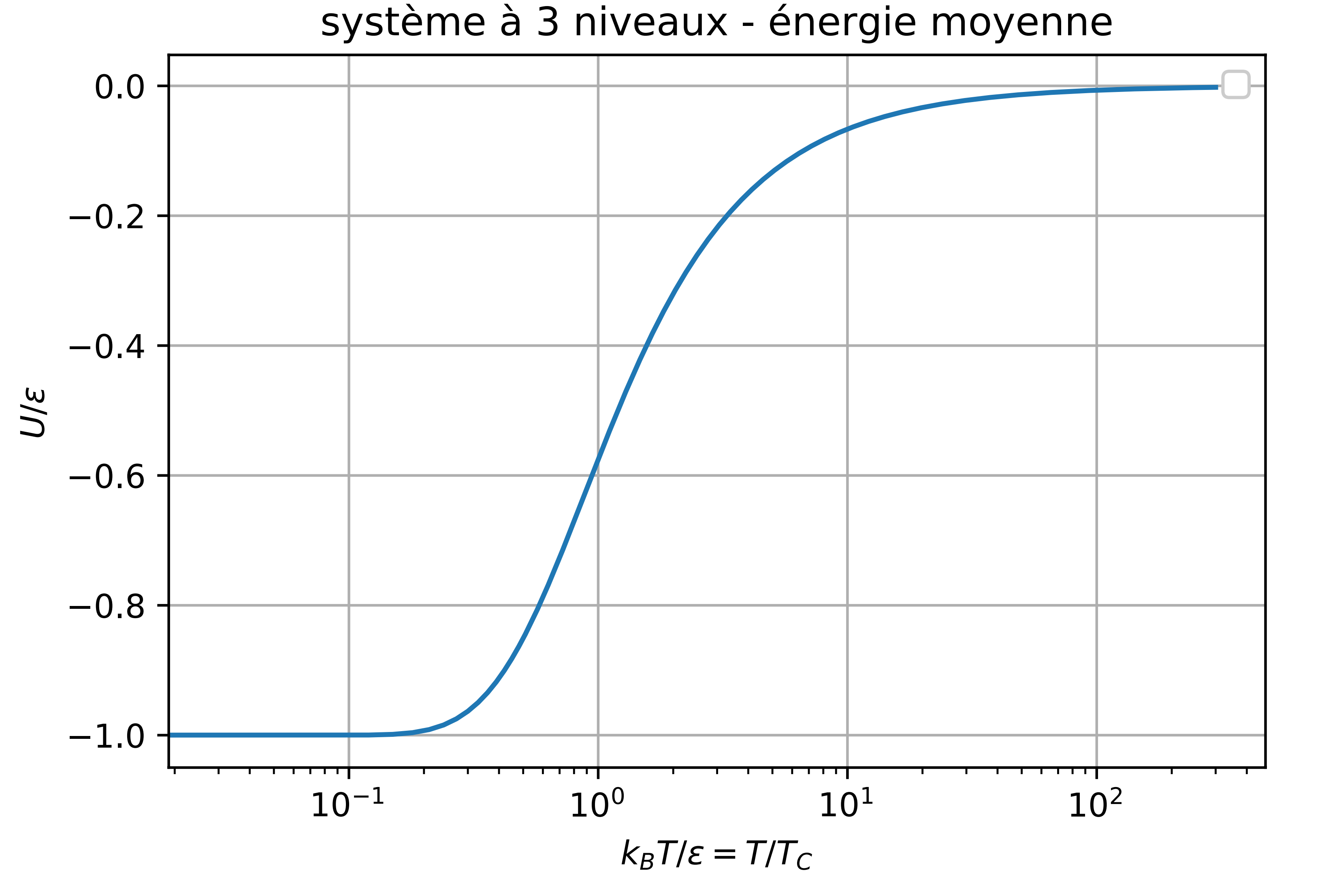
3. Voir graphe page suivante. On interprète les limites basse température (" tout le monde est dans l'état de plus basse énergie ") et haute température (les 3 niveaux d'énergie sont équiprobables) comme dans le cas du système à 2 niveaux.

4. $C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T}$ avec $\frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2}$ et

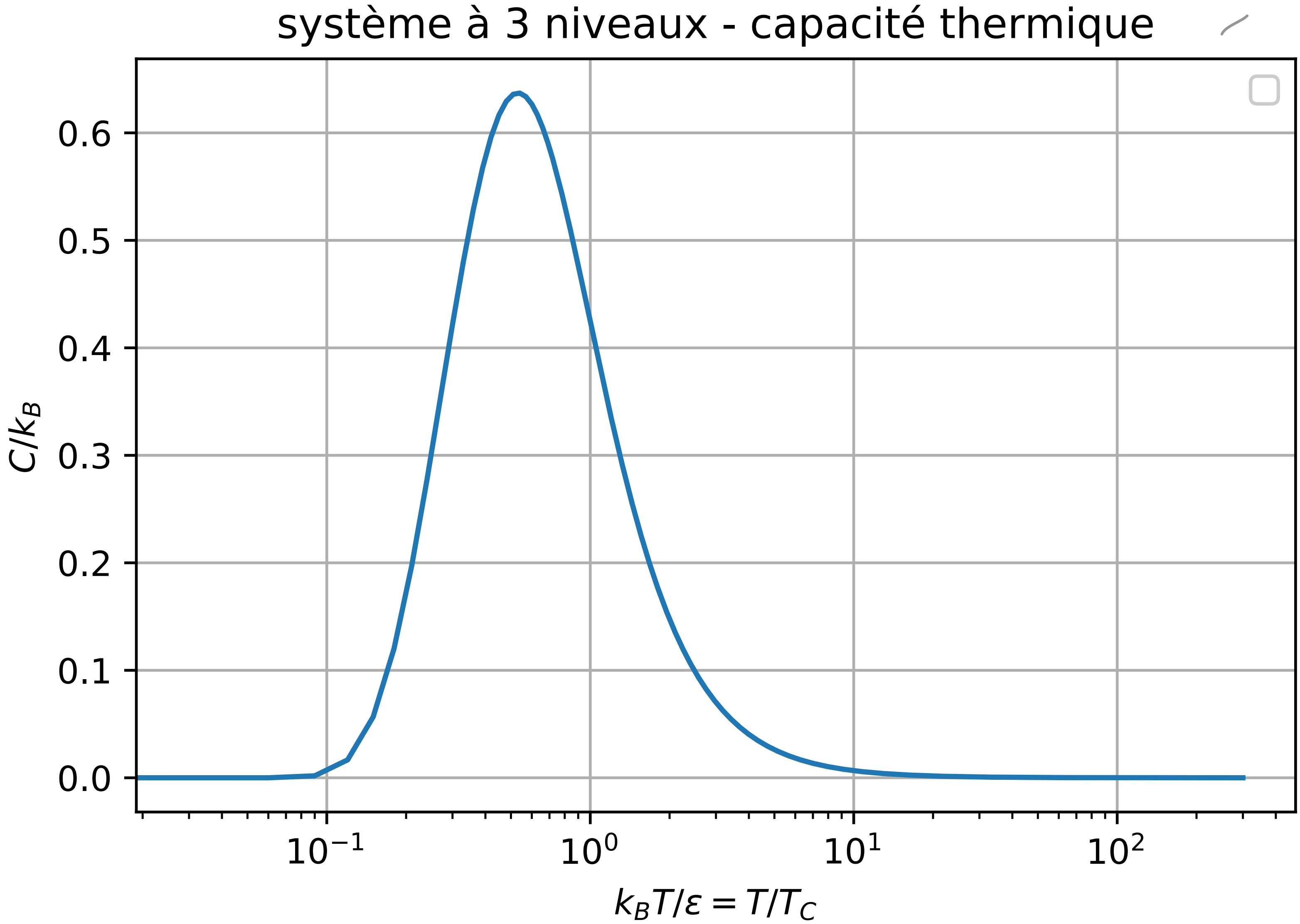
$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = -2 \varepsilon^2 \frac{\left(\mathrm{ch}(\beta \varepsilon) \left(1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)\right) - \mathrm{sh}(\beta \varepsilon) \cdot 2\,\mathrm{sh}(\beta \varepsilon) \right)}{\left(1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)\right)^2} = \frac{-2 \varepsilon^2 \left(\mathrm{ch}(\beta \varepsilon) + 2 \right)}{\left(1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)\right)^2}$$

Donc $\boxed{C = k_B \frac{2 (\beta \varepsilon)^2 \left(\mathrm{ch}(\beta \varepsilon) + 2 \right)}{\left(1 + 2\,\mathrm{ch}(\beta \varepsilon)\right)^2}}$

Là encore, on multiplie par N pour N particules. Graphe page suivante.



système à 3 niveaux - énergie moyenne
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
U/ε
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
$k_B T/\varepsilon = T/T_C$


système à 3 niveaux - capacité thermique
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
C/k_B
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
$k_B T/\varepsilon = T/T_C$

Exercice 4

Montrer que le maximum de la capacité thermique d'un système à deux niveaux est obtenu pour une température qui vérifie $ch(x) = xsh(x)$ avec $x = \varepsilon/k_BT$. En utilisant le calcul numérique (dichotomie par exemple), vérifier que cela conduit à $T = 0,833\ T_C$ (avec $T_C = \varepsilon/k_B$).

On reprend l'expression de la capacité thermique pour un système à 2 niveaux :

$$C = k_B \frac{x^2}{ch^2(x)} \quad \text{avec} \quad x = \beta \varepsilon = \frac{\varepsilon}{k_B T}$$

On cherche le maximum de C en dérivant :

$$\frac{dC}{dT} = \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dT} \quad , \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dT} = -\frac{\varepsilon}{k_B T^2}$$

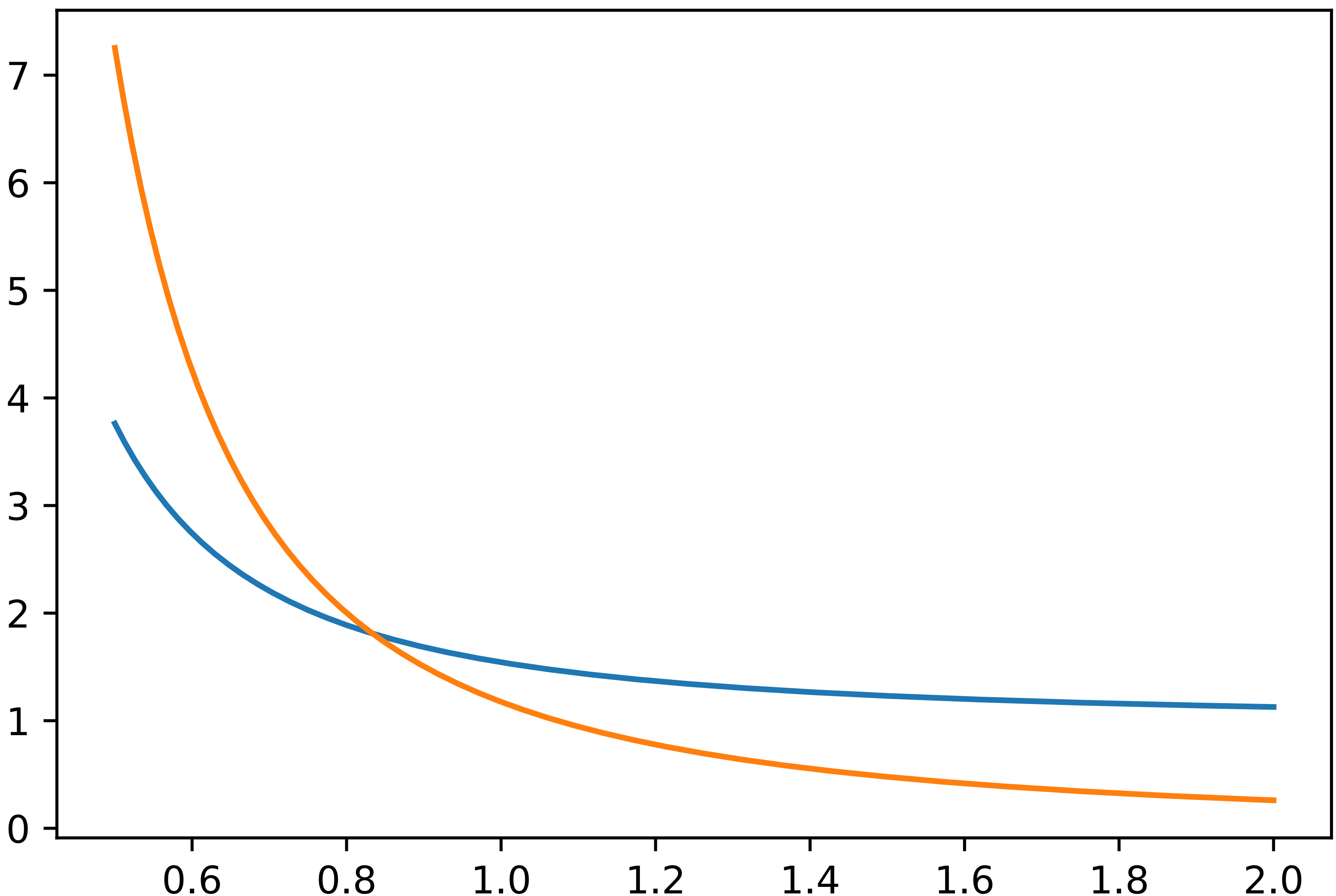
$$\text{et} \quad \frac{dC}{dx} = k_B \left(\frac{2x\ ch^2(x) - x^2 . 2\ ch(x)\ sh(x)}{ch^4(x)} \right)$$

$$\text{donc} \quad \frac{dC}{dT} = 0 \iff 2x\ ch^2(x) - 2x^2\ ch(x)\ sh(x) = 0$$

$$\text{soit} \quad \boxed{ch(x) = x\ sh(x)}$$

On peut vérifier graphiquement le point de croisement des courbes pour avoir une idée, le mieux est d'utiliser la dichotomie pour résoudre $ch(x) - x\ sh(x) = 0$.

On trouve bien $x = 0,833$ -


7
6
5
4
3
2
1
0
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0