Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 22 : 17 au 21 mars 2025

Dernière semaine de colle.

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Calculer la fonction génératrice et en déduire l'espérance de X lorsque *(le colleur choisira deux exemples de la liste suivante)* : X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ou une loi binomiale de paramètres n et p ou une loi géométrique de paramètre p ou une loi de Poisson de paramètre λ.
- ☐ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, $G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.
  Application : Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda_1), \dots, \mathcal{P}(\lambda_n)$, déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
- ☐ Considérons l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Rappeler la définition du wronskien W d'un couple de solutions (φ_1, φ_2) et montrer que, pour tout $t \in I$, $W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)$.
- ☐ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la dérivée de φ.
- ☐ Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y. \end{cases}$
- ☐ Résoudre l'équation différentielle $ty' - 4y = t^4$, d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Chapitre 23 : Espérance et variance

IV Fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

IV.1 Définition

- fonction génératrice $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$.
- la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Elle converge normalement sur $[-1,1]$. Ainsi, G_X est définie et continue sur $[-1,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
- la loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- $X \in L^1$ si et seulement si G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.
- $X \in L^2$ si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

IV.2 Fonctions génératrices des lois usuelles

- fonctions génératrices à savoir calculer rapidement : lois de Bernoulli, lois binomiales, lois géométriques, lois de Poisson.

IV.3 Somme de variables aléatoires indépendantes

- si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes (et à valeurs dans $\mathbb{N}$), alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.

Chapitre 24 : Équations différentielles linéaires

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{C}$ ou le corps $\mathbb{R}$.

I Théorème de Cauchy linéaire

I.1 Équations différentielles

- vocabulaire : équation différentielle scalaire, vectorielle, équation linéaire/non linéaire, équation linéaire d'ordre n, équation normalisée, équation homogène, équation à coefficients constants.
- notation $x' = a(t) \cdot x + b(t)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont deux applications continues et $x : I \to E$ est l'inconnue. Définition d'une solution.
- système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$, où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont deux applications continues et $x : I \to \mathbb{K}^n$ est l'inconnue.
- toute équation différentielle scalaire d'ordre n normalisée peut se représenter sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.

I.2 Problème de Cauchy

- $\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
- $\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
- $\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$
- mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

I.3 Théorème de Cauchy linéaire

- théorème admis : existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

II Étude de l'équation homogène

II.1 Structure de l'ensemble des solutions

- l'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène $x' = a(t) \cdot x$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- à $t_0 \in I$ fixé, l'application $i : \varphi \mapsto \varphi(t_0)$ est un isomorphisme de S_0 dans E.
- $\dim(S_0) = \dim(E)$.
- adaptation au cas des équations scalaires d'ordre n.

II.2 Équations scalaires homogènes d'ordre 1 et 2

- équation scalaire homogène d'ordre 1 : résolution explicite.
- équations scalaire homogène d'ordre 2 : définition du wronskien W d'un couple de solutions (φ_1, φ_2). Le wronskien est solution d'une équation scalaire d'ordre 1.
- (φ_1, φ_2) est une base de S_0 si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$ si et seulement si pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.

II.3 Exponentielle d'endomorphisme ou de matrice

- rappels du chapitre 10 : exponentielle de matrice, d'endomorphisme. Formules pour $\exp(A+B)$ si A et B commutent, $\exp(A)^{-1}$, $\exp(D)$ si D est diagonale, $\exp(N)$ si N est nilpotente. Si $A = PBP^{-1}$, alors $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.
- spectre de $\exp(A)$, dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- continuité de $A \mapsto \exp(A)$.
- dérivabilité de $t \mapsto \exp(tA)$.

II.4 Équations différentielles homogènes à coefficients constantes

- solutions de $x' = a \cdot x$, de $X' = A \cdot X$.
- si A est diagonalisable, expression d'une base de l'ensemble des solutions.
- cas des équations scalaires homogènes d'ordre 1, d'ordre 2 à coefficients constants (solutions réelles ou complexes).

III Équations avec second membre

III.1 Structure de l'ensemble des solutions

- principe de superposition.
- l'ensemble des solutions forme un espace affine de la forme : $S = S_0 + \varphi_p$, où S_0 est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée, et φ_p est une solution particulière.

III.2 Équations scalaires du premier ordre

- $y' + a(t)y = b(t)$: sur un exemple, méthode de variation de la constante.

III.3 Équations scalaires du second ordre

- méthode de variation des constantes.
- pour les équations à coefficients constants, exemples de seconds membres particuliers.

IV Techniques de recherche de solutions

- changement de variables.
- recollement de solutions.
- solutions développables en série entière.