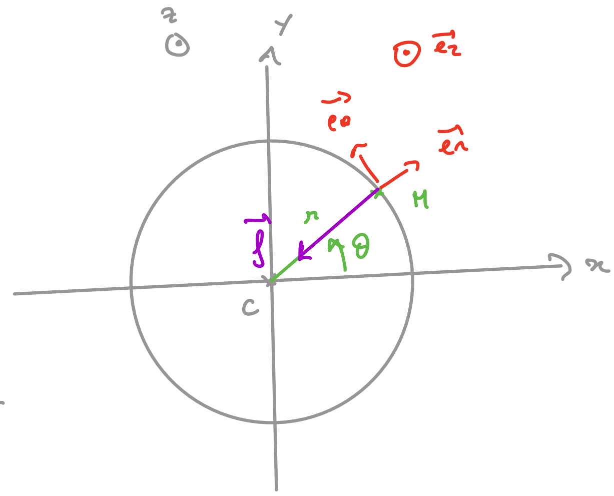
Problème 3



1. force de Coulomb : $\vec{f} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$

2° loi de Newton : $m_e\vec{a} = \vec{f}$ (1)

Avec $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ (mvt circulaire)

Project° de (1) sur $\vec{e_r}$: $-m_e r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2}$

$\Rightarrow m_e r^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Or, $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \Rightarrow v = r\dot{\theta}$

D'où $m_e v^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (2) D'où $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}}$

2. $e_m = e_c + e_p = \dfrac{1}{2}m_e v^2 - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

D'où (en utilisant (2)) : $e_m = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{e_m = \dfrac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}}$ (3)

3. $\vec{L} = m\,\vec{OM}\wedge\vec{v} = m_e(r\,\vec{e_r})\wedge(r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta})$

$= m_e r^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} = m_e v r\,\vec{e_z}$.

Soit $L = m v r \Rightarrow L^2 = m_e^2 v^2 r^2 = m_e r^2 \cdot \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (d'après (2))

$= \dfrac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot r$

Or, $L = n\hbar$, donc $n^2\hbar^2 = \dfrac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \cdot n^2$

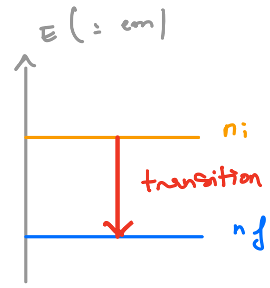
Soit $\boxed{r = n^2 a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$ A.N : $a_0 = 53$ pm

4. On injecte l'expression de r dans (3) : $e_m = \dfrac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{n^2 a_0} = -\dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}$

$= -\dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$

Soit $\boxed{e_m = -\dfrac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}$ A.N : $E_0 = 13{,}6$ eV

5.



$$E_{photon} = E_i - E_f = E_0\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Or, $E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_{photon}}$

D'où $\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$

Soit $\boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{E_0}{hc}}$

A.N : $R_H = 1{,}1 \cdot 10^7 \ m^{-1}$

6. Domaine UV (ultra violet).

λ_1 correspond à $n_i = 2$

λ_2 ———— $n_i = 3$

λ_3 ———— $n_i = 4$

On retrouve bien la valeur de R_H.

7. Le module carré de la fonction d'onde donne la densité de probabilité de présence de la particule.

8. $\psi(r) = A\, e^{-r/a_0}$

On utilise les coordonnées sphériques : $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

La proba de trouver la particule "n'importe où dans l'espace" est égale à 1, donc $\iiint_{espace} |\psi|^2 \, dV = 1$ (condition de normalisation).

Or, $|\psi|^2 = |\psi|^2 = A^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$

Donc $\iiint A^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 1$

$$\Rightarrow A^2 \underbrace{\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr}_{= I} \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi} \times \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{= 2} = 1$$

On calcule I avec 2 intégrations par parties successives, ce qui donne :

$$I = \frac{a_0^3}{4}$$

Donc $A^2 \cdot \frac{a_0^3}{4} \cdot 4\pi = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}}$

9. Eq. Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta(\varphi) + V\varphi = E\varphi$

Or, $\Delta(\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\left(-\frac{1}{a_0} A e^{-r/a_0}\right)\right)$

$= -\frac{A}{a_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-r/a_0}\right)}_{e^{-r/a_0}\left(2r - r^2/a_0\right)}$

Soit $\Delta(\varphi) = \frac{A}{a_0}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{2}{r}\right) e^{-r/a_0}$

D'où $-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{A}{a_0}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{2}{r}\right) e^{-r/a_0} + \left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) A e^{-r/a_0} = E A e^{-r/a_0}$

Ce qui implique $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{2}{r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E$

Or, $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$, donc $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\left(\frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} - \frac{2}{r}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = E$

Soit $E = \underbrace{-\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}_{E_0} + \cancel{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} - \cancel{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ On retrouve bien l'expression de E_0 de la question 4 -

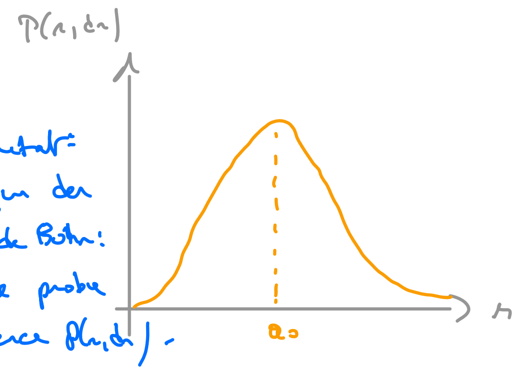
10. La proba que la particule soit entre r et $r + dr$ est égale à :

$P(r, dr) = \iint |\varphi|^2 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = A^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{=4\pi}$

intégrale sur sphère de rayon r

D'où $P(r, dr) = \frac{1}{\pi a_0^3} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 4\pi$, soit $\boxed{P(r, dr) = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}}$

11.



interprétation quantique du rayon de Bohr : max de proba de présence $P(r, dr)$.

$\frac{dP}{dr} = \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \underbrace{\left(2r + r^2\left(-\frac{2}{a_0}\right)\right)}_{= 2r\left(1 - r/a_0\right)}$

Donc $\frac{dP}{dr} = 0$ pour $r = a_0$

$\Rightarrow$ $P(r, dr)$ est max pour $r = a_0$