28 p.

DS 7 - Problème 2

1p.

1. $P_{th} = \iint \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}$ et $\vec{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T)$ donc λ est en $W.K^{-1}.m^{-1}$

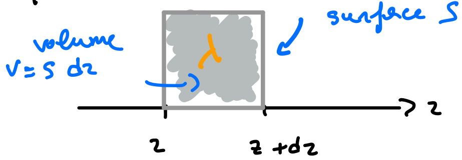
$\underbrace{P_{th}}_{W}$, $\underbrace{\vec{j_Q}}_{W.m^{-2}}$, $\underbrace{\vec{dS}}_{m^2}$; $\underbrace{\vec{j_Q}}_{W.m^{-2}}$, $\underbrace{\lambda}_{W.K^{-1}.m^{-1}}$, $\underbrace{\overrightarrow{grad}(T)}_{K.m^{-1}}$

1p.

2. pb unidimensionnel selon (Oz) : $\vec{j_Q} = j_Q(z)\, \vec{e_z}$

3p.

3. volume $V = S\,dz$



On applique le 1° principe au volume V de matériau :

$dU = \delta Q$ (on néglige le travail)

avec $U = \rho V c\, T \Rightarrow dU = \rho V c\, dT$

et $\delta Q = P_{th}\, dt$ avec $P_{th} = \left(\vec{j_Q}(z)\cdot\vec{e_z} + \vec{j_Q}(z+dz)\cdot(-\vec{e_z})\right) S$

puissance entrante

donc $P_{th} = S\left(j_Q(z) - j_Q(z+dz)\right) = -\underbrace{S\,dz}_{V} \dfrac{\partial j_Q}{\partial z}$

D'où $\rho \cancel{V} c\, dT = -\cancel{V} \dfrac{\partial j_Q}{\partial z}\, dt$

$\Rightarrow \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}$

on utilise la loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}\vec{e_z}$

$\Rightarrow j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}$

D'où $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}\right)$

et finalement $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

2p.

4. En RS, $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

et donc $\dfrac{d^2 T}{dz^2} = 0$

donc $T = az + b$,

$\dfrac{\partial T}{\partial z} = a$ et donc

$\overrightarrow{grad}(T) = \lambda a\, \vec{e_z}$

$\Rightarrow \vec{j_Q} = -\lambda a\, \vec{e_z}$

$\vec{j_Q}$ ne dépend pas de z.

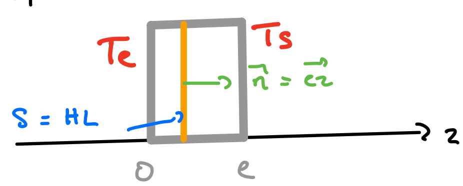
3p.

5. $T = az + b$ et les conditions aux limites imposent :

$\begin{cases} T(z=0) = T_e \\ T(z=e) = T_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_e \\ ae + b = T_s \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{T_s - T_e}{e}$

$\varphi = \iint_S \vec{j_Q}\cdot\vec{dS} = (j_Q \cdot \vec{e_z})\cdot(\vec{e_z})S = j_Q \cdot S$ ($\vec{j_Q}$ uniforme, $\perp$ à la surface) avec $S = HL$

on considère φ " orienté vers la droite "



Or, $j_Q = -\lambda a = \dfrac{\lambda(T_e - T_s)}{e}$

Donc $\varphi = \dfrac{\lambda HL}{e}(T_e - T_s)$

Si $T_e > T_s$, $\varphi > 0$, ce qui est cohérent.

6. $T_e - T_s = R_{th}\cdot\varphi$ (analogie avec $V_2 - V_1 = Ri$) donc $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda HL}$

2p.

" en série " : même flux

" en dérivation " : même différence de température

7. $\varphi = \dfrac{T_c - T_F}{R_{th}} = \dfrac{\lambda S\,(T_c - T_F)}{e} \Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{e\,\varphi}{S\,(T_c - T_F)}}$

1p.

8. On somme " en dérivation " les résistances thermiques des différentes faces :

les flux thermiques s'ajoutent, la différence de T est la même

3p.

$R_{diff}^{-1} = 2 \cdot R_1^{-1} + 4 \cdot R_2^{-1}$ avec $R_1 = \dfrac{e}{\lambda H^2}$ et $R_2 = \dfrac{e}{\lambda H L}$

D'où $R_{diff}^{-1} = \dfrac{2\lambda H^2}{e} + \dfrac{4\lambda H L}{e} = \dfrac{2\lambda H}{e}(H + 2L)$ | On note $S = 2H(H+2L)$, A.N : $S = 1{,}38\ m^2$

Donc $\boxed{R_{diff} = \dfrac{e}{2\lambda H(H+2L)}}$ A.N : $R_{diff} = 1{,}8 \,/\, 0{,}09\ K.W^{-1}$

épaisseur max — épaisseur min

9. $\phi = \vec{j}_Q \cdot (-\vec{n}) \cdot S = h S\,(T_{air} - T_{ext})$

3p.

pour une surface S, on considère le flux reçu par la brebis (d'où le $-\vec{n}$).

D'où la résistance thermique associée $R = \dfrac{1}{hS}$

Comme précédemment, on somme en dérivation les résistances thermiques associées aux différentes faces :

$R_{cc}^{-1} = 2R_1^{-1} + 4R_2^{-1}$ avec $R_1 = \dfrac{1}{hH^2}$ et $R_2 = \dfrac{1}{hHL}$

Donc $R_{cc}^{-1} = 2hH^2 + 4hHL = 2hH(H+2L)$

Finalement, $\boxed{R_{cc} = \dfrac{1}{2hH(H+2L)}}$ A.N : $R_{cc} = 0{,}18\ K.W^{-1}$

10. $R_r = \dfrac{T_{ext} - T_{air}}{P_r}$ donc $R_r = \dfrac{1}{kA}$ avec $A = 2H^2 + 4HL = 2H(H+2L)$

1p.

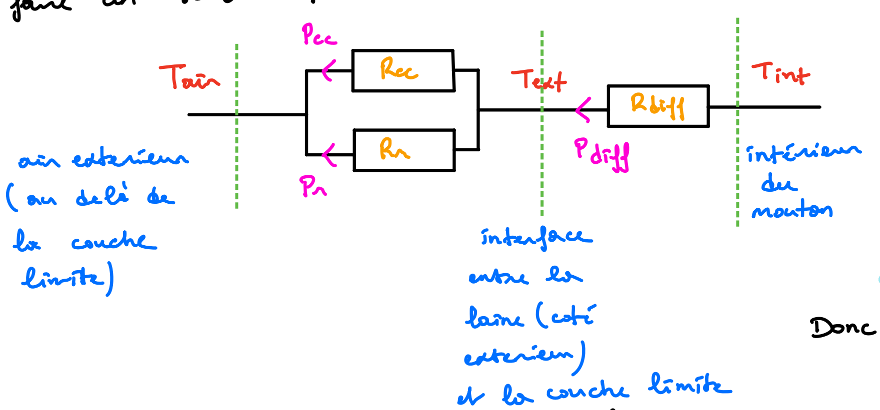
donc $\boxed{R_r = \dfrac{1}{2kH(H+2L)}}$

11. R_r est " en dérivation " avec R_{cc} (les flux s'ajoutent)

R_{diff} est " en série " avec cette association (traversées par le même flux).

On peut faire un schéma par analogie avec l'électricité :

4p.



$R = R_{diff} + (R_{cc}^{-1} + R_r^{-1})^{-1}$

On note $S = 2H(H+2L)$

$R = \dfrac{e}{\lambda S} + (hS + kS)^{-1}$

$= \dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{S(h+k)}$

Donc $\boxed{R_{eq} = \dfrac{1}{S}\left(\dfrac{e}{\lambda} + \dfrac{1}{h+k}\right)}$

A.N : $R_1 = 1{,}9\ K.W^{-1}$ (laine épaisse) et $R_2 = 0{,}17\ K.W^{-1}$ (laine mince)

12. Avant la fonte, il y a au total $\dot{m}$ par seconde de vapeur d'eau émise, et par kg de vapeur d'eau il a fallu une énergie ΔH°_{vap} pour vaporiser.

2p.

La puissance de refroidissement associée vaut $p_{vap} = \dot{m}\,\Delta H^\circ_{vap}$

A.N : $p_{vap} = 14{,}5\ \text{mW}$

La puissance thermique est $P_1 = \dfrac{T_{int} - T_{ext}}{R_1}$

A.N : $P_1 = 17{,}89\ \text{W}$

$$\boxed{p_{m_0} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_1} + \dot{m}\,\Delta H^\circ_{vap}}$$

A.N : $p_{m_0} = 17{,}9\ \text{W}$

2p.

13. Même principe, $\boxed{p_{m_0}' = \underbrace{(\dot{m} + \dot{m}')}_{3\dot{m}}\,\Delta H^\circ_{vap} + \dfrac{T_{int} - T_{ext}}{R_2}}$

A.N : $p_{m_0}' = 200\ \text{W}$