ds7 correction problème 1

CHAMP DE MAREE

2p

1. Avec une répartition de masses à symétrie sphérique, le champ de gravitation créé par l'astre est le même que si toute la masse était concentrée au centre.

$$\overrightarrow{g_A}(M) = -Gm_A\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = -\frac{Gm_A}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

2p

2. Tout plan qui contient O est plan de symétrie de la distribution de masses, donc contient le champ, d'où $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(M)\overrightarrow{e_r}$.
La distribution de masses est invariante pour toute rotation de centre O, $g_A(M)$ est donc indépendant des coordonnées angulaires, on peut donc écrire $g_A(M) = g_A(r)$.

3p

3. En electromagnétisme, $\phi(\overrightarrow{E}/S) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ et en gravitation $\phi(\overrightarrow{g}/S) = -4\pi Gm_{\text{int}}$. On applique le th de Gauss en prenant une sphère de rayon r (avec $r > R_A$) et de centre O comme surface fermée. Comme $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(r)\overrightarrow{e_r}$, le flux est égal à $4\pi r^2 g_A(r)$ tandis que m_{int} est la masse de l'astre, d'où $4\pi r^2 g_A(r) = -4\pi Gm_A$ et donc $g_A(r) = -\frac{Gm_A}{r^2}$. D'où $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(r)\overrightarrow{e_r} = -\frac{Gm_A}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.

2p

4. Mouvement de translation (quasi) circulaire. Les référentiels géocentrique et héliocentrique ont les mêmes axes, donc pas de rotation. Force d'inertie d'entrainement sur une masse m dans un cas de translation seule, donc $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a}_{T/R_h}$, $\overrightarrow{a}_{T/R_h}$ étant bien l'accélération du référentiel non galiléen (géocentrique) par rapport à un référentiel galiléen (héliocentrique).

2p

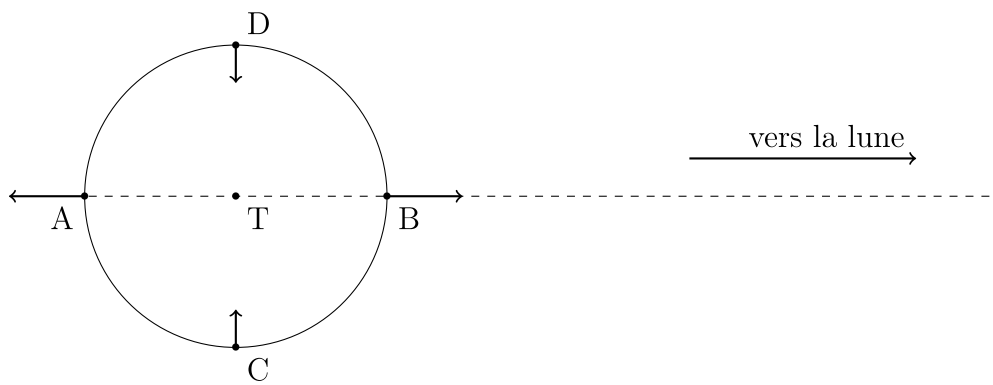
5. On applique la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton à la terre dans le référentiel héliocentrique (galiléen), ce qui donne $m_T\overrightarrow{a}_{T/R_h} = \overrightarrow{f}_{soleil\to terre}$, et compte tenu de l'hypothèse de l'énoncé, $\overrightarrow{f}_{soleil\to terre} = m_T\overrightarrow{g_S}(T)$, d'où $\overrightarrow{a}_{T/R_h} = \overrightarrow{g_S}(T)$.

2p **6.** En rassemblant les résultats précédents, $\overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_{ie}} = m\overrightarrow{g_S}(M) - m\overrightarrow{g_S}(T)$, d'où

$$\overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_{ie}} = m\left(-Gm_S\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \left(-Gm_S\frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)\right) = -mGm_S\left(\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)$$

et en posant $\overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_{ie}} = m\overrightarrow{C_S}(M)$ on obtient $\overrightarrow{C_S}(M) = -Gm_S\left(\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)$.

2p **7.** La force de gravitation est dirigée vers la lune et est plus ou moins intense, tandis que la force d'inertie est partout la même.



2p **8.** Marée haute en A et B, basse en C et D. On retrouve la même situation que pour C et D (donc marée basse) pour tous les points situés dans le plan orthogonal à la direction terre lune et qui contient T.

2p **9.** La troisième loi de Kepler donne $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 {d_L}^3}{Gm_T}}$, et numériquement $T \simeq 27,3$jours.

2p **10.** Environ 24h pour la rotation propre de la terre, on peut donc considérer en première approximation que la lune reste immobile pendant une rotation propre de la terre, ce qui conduit à une périodicité des marées de l'ordre de $12h$.

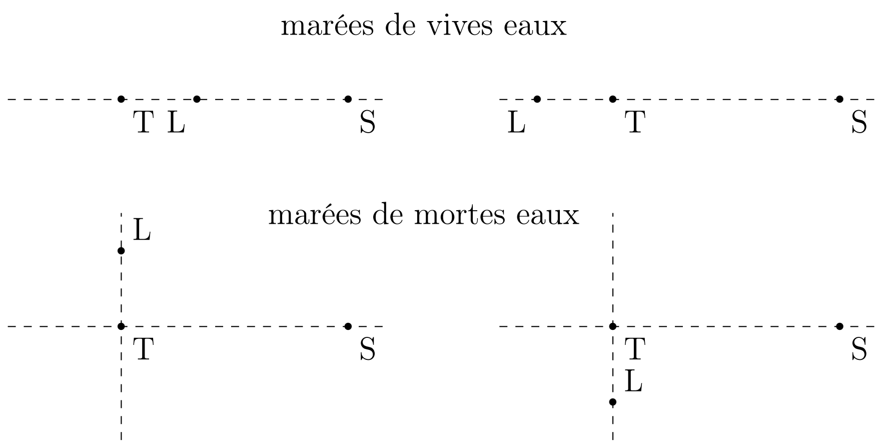
3p **11.** $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TM} = -d_L\overrightarrow{e_z} + r\overrightarrow{e_r}$. On développe le carré scalaire :
$LM^2 = LT^2 + TM^2 + 2\overrightarrow{LT}.\overrightarrow{TM} = {d_L}^2 + r^2 - 2d_L r\cos(\theta)$, soit
$LM^2 = {d_L}^2\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos(\theta) + \left(\frac{r}{d_L}\right)^2\right)$ et donc au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$ on a
$LM^2 = {d_L}^2\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos(\theta)\right)$, soit $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{{d_L}^3}\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos(\theta)\right)^{-\frac{3}{2}}$.

On utilise ensuite le DL au premier ordre $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u$ avec $\alpha = -3/2$ et $u = -2\frac{r}{d_L}\cos(\theta) << 1$, ce qui donne $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{{d_L}^3}\left(1 + \frac{3r\cos(\theta)}{d_L}\right)$.

3p **12.** En utilisant les résultats des questions B6 et B11, on a :
$\overrightarrow{C_L}(M) = -Gm_L\left((-d_L\overrightarrow{e_z} + r\overrightarrow{e_r})\frac{1}{{d_L}^3}\left(1 + \frac{3r\cos(\theta)}{d_L}\right) - (-d_L\overrightarrow{e_z})\frac{1}{{d_L}^3}\right)$
En simplifiant et en éliminant le terme du deuxième ordre en $\frac{r}{d_L}$, cela donne :
$\overrightarrow{C_L}(M) = -\frac{Gm_L}{{d_L}^3}\left(-d_L\overrightarrow{e_z}\frac{3r\cos(\theta)}{d_L} + r\overrightarrow{e_r}\right) = \frac{Gm_Lr}{{d_L}^3}\left(3\cos(\theta)\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_r}\right)$.

2p **13.** On peut remarquer que les caractéristiques de la lune interviennent dans son champ de marée via un facteur $\frac{m_L}{{d_L}^3}$, de manière analogue on aura $\frac{m_S}{{d_S}^3}$ pour le soleil. On a donc $\frac{\text{influence de la lune}}{\text{influence du soleil}} = \left(\frac{m_L}{{d_L}^3}\right) / \left(\frac{m_S}{{d_S}^3}\right) = \frac{m_L\,{d_S}^3}{m_S\,{d_L}^3}$, ce qui donne numériquement environ 2,25.

4p **14.**



Les marées de vives-eaux correspondent à la pleine lune et à la nouvelle lune ; tandis que les marées de mortes-eaux correspondent aux premier et dernier quartier. La périodicité est donc de l'ordre de 29 jours.

AMPLITUDE DES MAREES OCEANIQUES

2p **15.** Il faut $\alpha = -1$ et $\beta = 4$. On a ainsi $\Delta h = \frac{m_L\, {R_T}^4}{m_T\, {d_L}^3}$, l'application numérique donne $\Delta h = 37cm$.

3p **16.** La relation $\overrightarrow{grad}(p) = \overrightarrow{f_v}$ traduit l'équilibre d'une particule fluide. Ses termes sont homogènes à une force par unité de volume ($ML^{-2}T^{-2}$). Si la force sur une masse m s'écrit $m(...)$ alors la force sur une particule fluide de volume dV est $\mu dV(...)$ et donc la force par unité de volume correspondante $\mu(...)$. On a donc $\overrightarrow{f_v} = -\frac{\mu G m_T}{r^2}\overrightarrow{e_r} + \mu\overrightarrow{C_L}(M)$, et en utilisant le résultat qui suit la question B12, $\overrightarrow{f_v} = \mu G \left(-\frac{m_T}{r^2}\overrightarrow{e_r} + \frac{m_L r}{{d_L}^3}\left((3\cos^2(\theta) - 1)\,\overrightarrow{e_r} - 3\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{e_\theta}\right)\right)$.

2p **17.** V_T doit vérifier $-\overrightarrow{grad}(V_T) = -\frac{\mu G m_T}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, ce qui compte tenu de l'expression du gradient en coordonnées sphériques donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_T}{\partial r} = \frac{\mu G m_T}{r^2} \\ \frac{\partial V_T}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial V_T}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que V_T est indépendant des coordonnées angulaires, et en intégrant que
$V_T = -\frac{\mu G m_T}{r} + cste$. On choisit $V_T(r \to \infty) = 0$, ce qui donne $cste = 0$ et donc finalement $V_T = -\frac{\mu G m_T}{r}$.

2p **18.** En l'absence de tension superficielle, la loi de l'hydrostatique $\overrightarrow{grad}(p) = \overrightarrow{f_v}$ avec $\overrightarrow{f_v} = -\overrightarrow{grad}(V_T + V_L)$ reste valable à la surface. Donc $\overrightarrow{grad}(p) = -\overrightarrow{grad}(V_T + V_L)$, soit $\overrightarrow{grad}(p + V_T + V_L) = \overrightarrow{0}$. On en déduit que $p + V_T + V_L = cste$ (notamment au niveau de la surface mais pas seulement, c'est valable partout dans le fluide) et comme $p = cste$ à la surface alors $V_T + V_L = cste$ sur toute la surface. En remplaçant V_T et V_L par leurs expressions, on a $-\frac{\mu G m_T}{r} - \mu G \frac{m_L}{{d_L}^3}\frac{r^2}{2}\,(3\cos^2(\theta) - 1) = cste$, soit $\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{{d_L}^3}\frac{r^2}{2}\,(3\cos^2(\theta) - 1) = cste$

4p **19.** En posant $r = R_T + h = R_T\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)$ avec $\frac{h}{R_T} << 1$, on a, au premier ordre en $\frac{h}{R_T}$: $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right)$ et $r^2 = {R_T}^2\left(1 + 2\frac{h}{R_T}\right)$.
D'où, en injectant ces résultats dans $\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{{d_L}^3}\frac{r^2}{2}\,(3\cos^2(\theta) - 1) = \frac{m_T}{R_T}$:
$\frac{m_T}{R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right) + \frac{m_L}{{d_L}^3}\frac{{R_T}^2}{2}\left(1 + 2\frac{h}{R_T}\right)(3\cos^2(\theta) - 1) = \frac{m_T}{R_T}$, ce qui donne en simplifiant

et en factorisant $h\left(\frac{m_T}{{R_T}^2}-\frac{m_L R_T}{{d_L}^3}(3\cos^2(\theta)-1)\right)=\frac{m_L}{{d_L}^3}\frac{{R_T}^2}{2}(3\cos^2(\theta)-1)$. Les applications numériques donnent $\frac{m_L\,R_T}{{d_L}^3}\approx 8500\ SI$ et $\frac{m_T}{{R_T}^2}\approx 1,5.10^{11}\ SI$, on peut donc raisonnablement négliger $\frac{m_L\,R_T}{{d_L}^3}$ devant $\frac{m_T}{{R_T}^2}$, l'expression se simplifie donc en $h=\frac{m_L\,{R_T}^4}{2m_T\,{d_L}^3}(3\cos^2(\theta)-1)$

2p

20. Le marnage est maximal à l'équateur, car les valeurs de θ qui caractérisent un point de l'équateur varient entre 0 (aligné avec L et T, entre L et T) et π (aligné avec L et T, de l'autre coté de T par rapport à L) en passant par $\pi/2$ (dans le plan orthogonal à (TL) qui passe par T).
Le marnage aux pôles est nul (θ n'y varie pas).

3p

21. La hauteur minimale h_{min} correspond à $cos(\theta)=0$ et vaut donc $h_{min}=-\frac{m_L\,{R_T}^4}{2m_T\,{d_L}^3}$; alors que hauteur maximale h_{max} correspond à $cos(\theta)=1$ et vaut $h_{\max}=2\frac{m_L\,{R_T}^4}{2m_T\,{d_L}^3}$.
Le marnage $\Delta h=h_{\max}-h_{min}$ a finalement pour expression $\Delta h=\frac{3}{2}\frac{m_L\,{R_T}^4}{m_T\,{d_L}^3}$.
On retrouve le résultat de la question C1 avec un facteur 3/2, l'application numérique donne $56cm$.