

La durée est de 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1 Phénomènes de marées

Données :

- distance Terre Lune : $d_L = 3,8.10^8 \text{ m}$
- distance Terre Soleil : $d_S = 1.5.10^{11} \text{ m}$
- rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^6 \text{ m}$
- masse du Soleil : $m_S = 2.10^{30} \text{ kg}$
- masse de la Terre : $m_T = 6.10^{24} \text{ kg}$
- masse de la Lune : $m_L = 7,3.10^{22} \text{ kg}$
- constante de gravitation universelle : $G = 6,7.10^{-11} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$

Les marées sont dues aux champs de gravitation au niveau de la Terre des différents astres du système solaire, principalement la Lune et le Soleil. On considérera que les astres ont une distribution de masse à symétrie sphérique.

1. Donner sans justification l'expression du champ de gravitation $\vec{g}_A(M)$ créé par l'astre A, de masse m_A et de centre O , en un point M en dehors de l'astre. On pourra noter $r = OM$ la distance entre O et M et \vec{e}_r un vecteur unitaire dirigé de O vers M .

On cherche maintenant à établir cette expression.

2. Montrer par des considérations de symétrie que $\vec{g}_A(M) = g_A(r)\vec{e}_r$.
3. Énoncer le théorème de Gauss dans le cadre de l'électromagnétisme, puis le transposer au cas de la gravitation. Utiliser ce résultat pour retrouver l'expression de la question 1. Préciser quelle est la simplification dans l'expression du champ de gravitation en dehors de l'astre apportée par la symétrie sphérique de la distribution de masses.

L'influence d'un astre sur les marées découle d'une petite différence entre la force de gravitation qu'il exerce et la force d'inertie dont il est responsable dans le référentiel géocentrique. On établit ici l'expression du champ de marée en prenant le Soleil comme exemple (dans les trois questions qui suivent, on ne considère que les forces de gravitation dues au soleil), mais le résultat est valable pour n'importe quel astre. Dans toute la suite, on considérera le référentiel héliocentrique (R_h) comme galiléen.

4. Décrire le mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique et en déduire l'expression de la force d'inertie d'entraînement sur un point matériel M de masse m dans le référentiel géocentrique. On notera \vec{a}_{T/R_h} l'accélération de T (centre de la Terre) dans le référentiel héliocentrique.
5. Établir que $\vec{a}_{T/R_h} = \vec{g}_S(T)$, où $\vec{g}_S(T)$ est le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la terre T . La Terre sera supposée avoir une distribution de masse à symétrie sphérique, ce qui fait que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est assimilable au produit de la masse de la terre par le champ de gravitation du Soleil en son centre.

6. En déduire que la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel géocentrique dues au Soleil sur un point matériel M de masse m s'écrit :

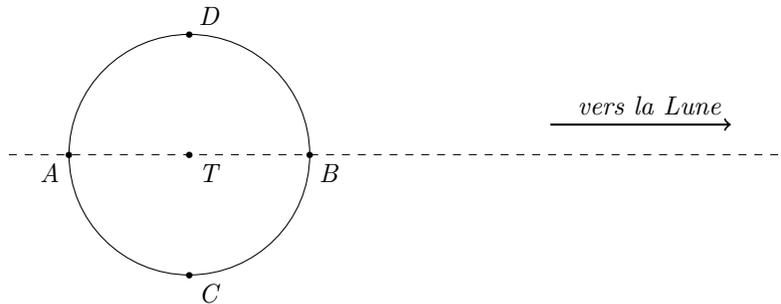
$$m\vec{C}_S(M) \quad \text{avec} \quad \vec{C}_S(M) = -Gm_S \left(\frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3} \right)$$

où S désigne le centre du Soleil, m_S sa masse, et G la constante de gravitation universelle. $\vec{C}_S(M)$ est appelé *champ de marée* du Soleil au point M .

Les marées sont essentiellement dues à l'influence de la Lune, celle du Soleil se traduisant par une plus ou moins grande amplitude (marées de vives eaux et de mortes eaux). Dans la suite on ne considère que l'influence de la Lune. Le résultat de la question **B6** est transposable à n'importe quel astre, l'expression du champ de marée dû à la Lune est donc (L désignant le centre de la Lune) :

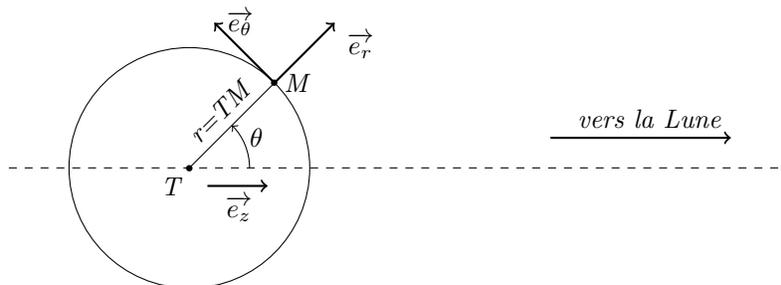
$$\vec{C}_L(M) = -Gm_L \left(\frac{\vec{LM}}{LM^3} - \frac{\vec{LT}}{LT^3} \right)$$

Sur le schéma ci-dessous on indique quelques points particuliers à la surface de la Terre, relativement à la position de la Lune.



7. Reprendre le dessin précédent et représenter en A, B, C et D la force gravitationnelle et la force d'inertie dues à la lune, ainsi que leur résultante (proportionnelle au champ de marée).
8. Indiquer les points (parmis A, B, C et D) de marée haute et de marée basse. Dans quel plan sont situés tous les points de marée basse ?
9. En utilisant la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique.
10. Donner un ordre de grandeur de la période de rotation propre de la Terre. Conclure sur la périodicité (approximative) des marées.

On cherche à simplifier l'expression du champ de marée, en tenant compte du fait que, pour un point M à la surface de la terre, $TM \ll TL$ et en effectuant un développement limité au premier ordre en $\frac{TM}{TL}$. On posera $TM = r$ et $TL = d_L$, et on repérera la position de M , dans le plan contenant L , T et M , en coordonnées polaires (voir la figure ci-dessous).



11. Montrer que $\overrightarrow{LM} = -d_L \vec{e}_z + r \vec{e}_r$. En déduire que, au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$, on a $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{d_L^3} \left(1 + \frac{3r \cos(\theta)}{d_L}\right)$.

12. En déduire que, toujours au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$:

$$\overrightarrow{C}_L(M) = \frac{G m_L r}{d_L^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_z - \vec{e}_r)$$

En projetant \vec{e}_z sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, on obtient finalement :

$$\overrightarrow{C}_L(M) = \frac{G m_L r}{d_L^3} ((3 \cos^2(\theta) - 1) \vec{e}_r - 3 \sin(\theta) \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$

13. Montrer que l'influence de la Lune sur les marées est de l'ordre de 2 fois plus importante que celle du soleil.

14. Préciser les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour les marées de vives eaux (amplitude maximale, les effets de la Lune et du Soleil s'ajoutent) et pour les marées de mortes eaux (amplitude minimale, les effets de la Lune et du Soleil se compensent partiellement). Attention à bien indiquer deux configurations distinctes pour chaque cas. Indiquer le lien avec les phases de la Lune et donner un ordre de grandeur de la périodicité de l'alternance vives-eaux / mortes-eaux.

Problème 2 Dessine moi un mouton

Le sujet s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11e et le 9 e siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.

La température du mouton

Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d'un coup de chaleur. Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondus, car la laine empêche la sueur de s'évaporer. C'est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

brebis non tondu	Adaptation facile	Adaptation difficile	Adaptation très difficile	Inadaptation
température (°C)	de -8 à 25	-15 à -8 / 25 à 35	-30 à -15 / 35 à 40	< -30 / > 40

La température d'un mouton en bonne santé se situe entre 38,5 et 39,5°C.

Sa longueur moyenne va de 1 m à 1,50 m.

La tonte a lieu 1 à 2 fois par an produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintient sa température de consigne $\theta_{eq} = 39^\circ\text{C}$ et mieux comprendre les éléments du document cidessus.

Propriétés de la toison de laine

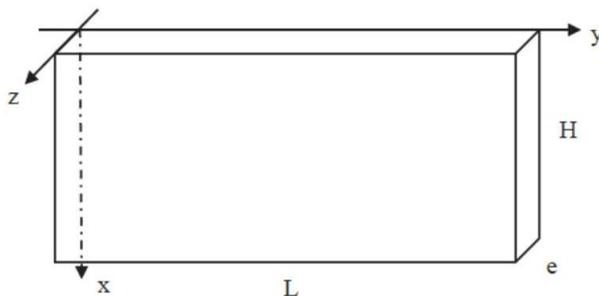
La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s'enflamme à 600°C), isolant phonique, absorbeur d'humidité, facile à teindre et 100% biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d'une vingtaine d'acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l'eau qui font que la fibre s'enroule en frisures. Ces dernières enferment une grande quantité d'air, ce qui limite la conduction. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur d'eau mais hydrophobe pour l'eau liquide. L'adsorption d'eau (désorption d'eau) s'accompagne d'une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de 20µm pour les moutons Mérinos à 40µm pour les races écossaises.

Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine} . On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique $\lambda_{laine} = 0,040 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température : $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \text{grad } T$

Quelle est la dimension de la conductivité thermique λ ?

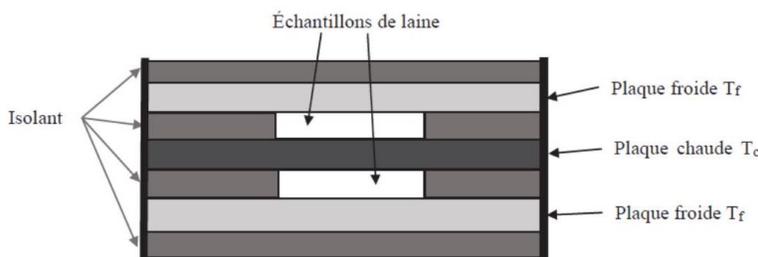
On considère un parallélépipède, de longueur L, de hauteur H et d'épaisseur e petite ($e \ll \min(L, H)$), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ , de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépend que de la variable z et du temps t.



2. Sur quelle direction est le vecteur densité \vec{j}_Q de courant thermique ? De quelles variables dépend-il ?
3. Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre z et $z + dz$ et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la température $T(z, t)$.
4. Que devient-elle en régime stationnaire ? Le vecteur \vec{j}_Q dépend-il de z ?
5. On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{\text{entrée}}$ en $z = 0$ et T_{sortie} en $z = e$. Que vaut la puissance thermique φ qui traverse le matériau en fonction de $e, \lambda, H, L, T_{\text{entrée}}$ et T_{sortie} ?
6. Définir puis exprimer la résistance thermique du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée. L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur e et de surface S séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique φ , engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures T_c, T_f des plaques chaude et froide sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

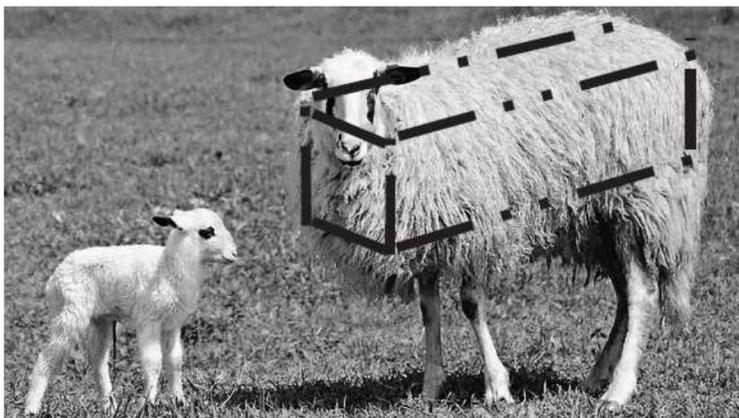
7. Exprimer l'expression de la conductivité λ_{laine} de l'échantillon en fonction de φ, e, S, T_c et T_f .

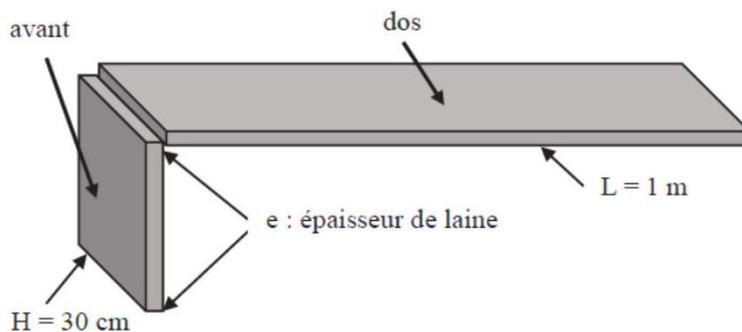


Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme $\theta_{\text{eq}} = 39^\circ\text{C}$, de longueur $L = 100$ cm et de section carrée de côté $H = 30$ cm. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_M = 10$ cm de laine avant la tonte à $e = e_m = 0,5$ cm après la tonte. La situation est représentée sur les figures qui suivent.

8. Exprimer la résistance R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de L, H, e et λ_{laine} . Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.





Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

9. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\vec{j}_Q = -h \cdot (T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \vec{n}$$

avec T_{ext} la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air} et le vecteur unitaire normal \vec{n} orienté de la brebis vers l'extérieur. On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4,0 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$. En déduire en fonction de h , L et H la résistance de conducto-convection R_{cc} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA (T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$$

avec A l'aire de la surface extérieure de la brebis, T_{ext} la température de cette surface en contact avec l'air de température T_{air} . La constante K a pour valeur $K = 5,0 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

10 Exprimer la résistance thermique de rayonnement R_r en fonction de K, L et H .

11. Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis $T_{\text{int}} = \theta_{\text{eq}} = 39^\circ\text{C}$ et la température de l'air T_{air} . Evaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5^\circ\text{C}$.

En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation. La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires en toute situation :

$$\dot{m} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ g s}^{-1}$$

Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue :

$$\dot{m}' = 2\dot{m}$$

et que la température extérieure est supérieure à $5,1^\circ\text{C}$.

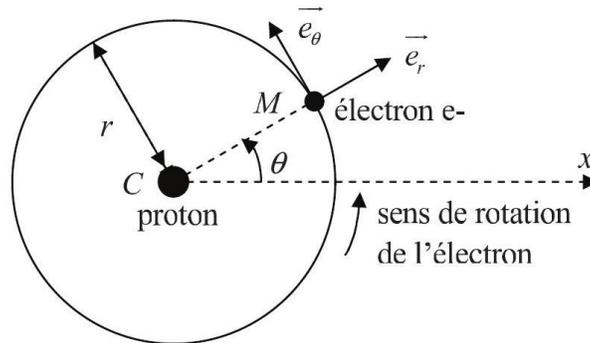
L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut $\Delta H^\circ_{\text{vap}} = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

12. En déduire la puissance $p_{\text{m}0}$ apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de $\dot{m}, L, R_1, T_{\text{int}}$ et T_{air} , puis on en fera l'évaluation numérique pour $T_{\text{air}} = T_0 = 5^\circ\text{C}$.

13. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5^\circ\text{C}$.

Problème 3 L'atome d'hydrogène

Nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_e et de charge électrique $q_e = -e$, qui tourne autour de son noyau, un proton de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r et de centre C (figure ci-dessous).



On utilise les coordonnées polaires (r, θ) et la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée.

- Déterminer l'expression de la vitesse v de l'électron en fonction de e, m_e, ε_0 et r .
- Exprimer l'énergie mécanique em de l'électron en fonction de e, ε_0 et r .

En 1913, Niels Bohr postule, la quantification de la norme du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre de l'atome (n est un entier strictement positif appelé nombre quantique) :

$$L = n \hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

3. Montrer que la quantification du moment cinétique entraîne celle du rayon de l'orbite, sous la forme $r = n^2 a_0$. Donner l'expression de a_0 et calculer sa valeur numérique. On donne : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ SI et $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ SI.

4. En déduire également la quantification de l'énergie (énergie mécanique) de l'électron, sous la forme $em = -\frac{E_0}{n^2}$. Donner l'expression de E_0 et calculer sa valeur numérique.

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

5. Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de Rydberg - Ritz : $\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$ avec $n_i > n_f$. R_H est la constante de Rydberg. Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0, h et c . Indiquer sa valeur et son unité.

Les raies de la série de Lyman sont celles pour lesquelles l'électron est revenu sur son niveau fondamental ($n_f = 1$). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121,5$ nm; $\lambda_2 = 102,5$ nm; $\lambda_3 = 97,2$ nm.

6. À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de Rydberg. Conclure.

Nous allons maintenant considérer le modèle quantique de l'atome d'hydrogène. En régime stationnaire, la partie spatiale $\varphi(r)$ de la fonction d'onde vérifie l'équation de Schrödinger (E est l'énergie d'un état stationnaire de l'électron et Δ l'opérateur Laplacien) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \varphi + V \varphi = E \varphi$$

- Que représente physiquement, le module carré de la fonction d'onde ?

Pour l'état fondamental ($n = 1$), la résolution de l'équation de Schrödinger conduit à (a_0 est le rayon de Bohr de la question 3 et A une constante réelle) :

$$\varphi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

8. Montrer que $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$.

9. A partir de l'équation de Schrödinger, établir l'expression de l'énergie E de l'état fondamental décrit ci-dessus. Comparer cette expression à celle de l'énergie E_0 du modèle de Bohr de la question 4. On donne l'expression du laplacien d'une fonction scalaire f en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right)$$

On note $P(r)$ la densité radiale de probabilité de présence d'un électron (c'est à dire que la probabilité que l'électron se trouve à une distance du noyau comprise entre r et $r + dr$ est égale à $P(r) dr$).

10. Montrer que $P(r)$ est égale à :

$$P(r) = 4 \frac{r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

11. Représenter l'allure de $P(r)$ montrer que $P(r)$ est maximale pour $r = a_0$. Commenter.