# TP numérique - simulation de monte carlo

Une simulation de monte carlo consiste à calculer une valeur approchée en tirant des nombres aléatoires. On rappelle que la fonction *random* du module *random* permet de tirer aléatoirement un flottant compris entre 0 et 1. L'objet de ce TP est de voir comment utiliser monte carlo pour évaluer des incertitudes. On importera matplotlib par *import matplotlib.pyplot as plt*.

## 1 Approximation de Pi

Un exemple classique de simulation de monte carlo consiste à déterminer une valeur approchée de $\pi$. Le principe est de tirer au hasard deux nombres compris entre 0 et 1, ce qui permet de définir un point à l'intérieur d'un carré de coté 1. On imagine ensuite un quart de disque de rayon 1, inscrit dans ce carré, la surface occupée par ce quart de disque vaut $\frac{\pi}{4}$ de celle du carré. En comptant, parmi un certain nombre de points tirés au hasard, ceux qui sont à l'intérieur du quart de disque, on peut évaluer une approximation de $\pi$. Coder une fonction *val_pi* qui prend en argument le nombre de tirages et qui renvoie une valeur approchée de $\pi$, ainsi que l'écart relatif par rapport à la valeur de référence.

## 2 Quelques fonctions utiles

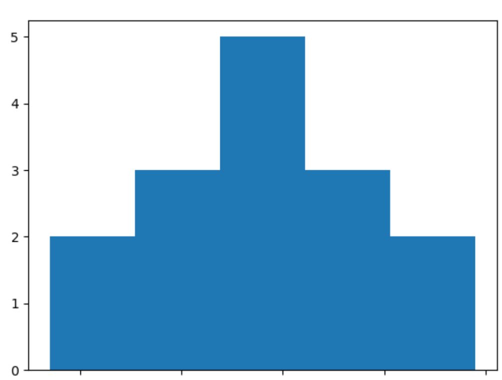
On code ici des fonctions qui seront utiles pour la suite. Pour les tester on pourra utiliser la liste de valeurs [1.7,2,2.6,2.9,3.1,3.4,3.5,3.7,4.1,4.2,4.4 ;4.5 ;4.8 ;5.4,5.9].

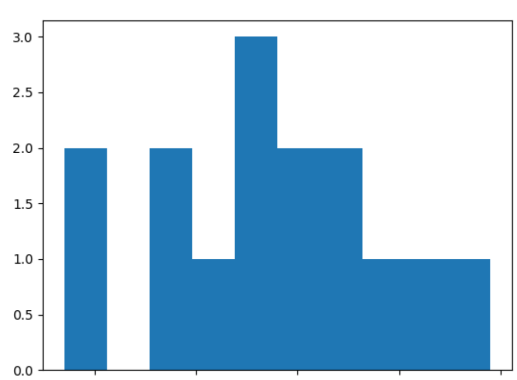
### 2.1 Moyenne et écart-type

Coder des fonctions *moyenne* et *ecartype* qui prennent en argument une liste de valeurs et renvoient respectivement la moyenne et l'écart-type des nombres de cette liste. Avec la liste proposée ci-dessus, on trouve une moyenne égale à 3.747 et un écart-type égal à 1.145.

### 2.2 Histogramme

Pour visualiser la répartition d'un ensemble de valeurs, on peut faire un histogramme. La fonction hist de matplotlib permet d'obtenir directement un histogramme, en lui donnant en argument la liste de valeurs et le nombre de subdivisions voulu. Par exemple *plt.hist(tab,bins=20)* donne l'histogramme de la liste *tab* avec 20 subdivisions. Ecrire une fonction *histogramme* qui prend en arguments une liste et un nombre de subdivisions, et affiche l'histogramme. Dans cette fonction, on initialise le graphe avec *figure* et on l'affiche avec *show*. Visualiser l'histogramme de la liste proposée ci-dessus avec 5, puis 10 subdivisions. On doit observer :



### 2.3 Tirage aléatoire dans un intervalle donné

On veut obtenir des nombres tirés aléatoirement à l'intérieur d'un intervalle centré sur $m$ et de largeur $l$, c'est-à-dire $[m - l/2, m + l/2]$. On considère ici que toutes les valeurs à l'intérieur de l'intervalle ont la même probabilité d'être tirées. Ecrire une fonction *intervalle* qui prend en arguments deux nombres $m$ et $l$ et qui renvoie une fonction (qui ne prend pas d'argument) qui elle-même renvoie un nombre dans l'intervalle. Pour l'utiliser, on écrira par exemple *intervalle(10,1)()*. On appellera une fonction comme *intervalle(10,1)* une fonction de répartition.

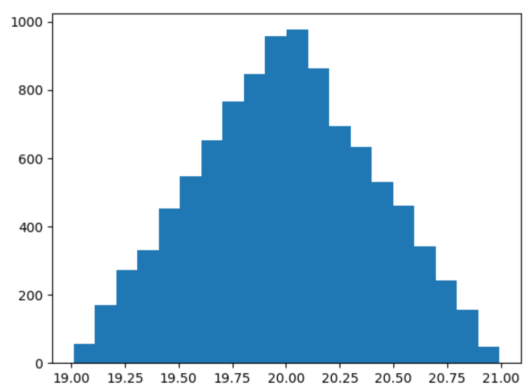
Ecrire ensuite une fonction *echantillon* qui prend en arguments une fonction de distribution (par exemple la fonction *intervalle(10,1)*) ainsi qu'un nombre de tirages $N$ et qui renvoie une liste de $N$ nombres tirés aléatoirement selon la fonction de distribution.

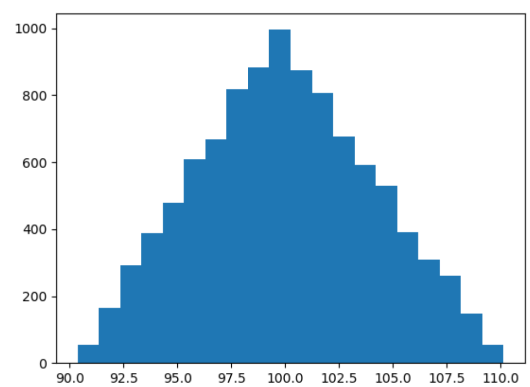
Tester *histogramme(echantillon(intervalle(10,1),10000),20)*.

### 2.4 Somme et produit

Ecrire des fonctions *somme* et *produit* qui font respectivement la somme et le produit de deux fonctions de répartition.

Obtenir les histogrammes pour la somme et le produit de deux nombres tirés aléatoirement dans un intervalle $[9.5, 10.5]$, avec 10000 tirages et 20 subdivisions. On obtient les allures suivantes :




## 3 Incertitudes

### 3.1 Type A / type B

Il y a essentiellement deux cas de figure lorsque l'on veut évaluer des incertitudes. Dans le premier (type A), on dispose d'un échantillon suffisant (au moins quelques dizaines) de valeurs associées à la même mesure. Il suffit alors de calculer l'écart-type de cet échantillon pour avoir l'incertitude.

Dans le second, on ne dispose que d'une valeur (ou d'un nombre réduit) et on ne peut pas faire de statistiques dessus. On dispose cependant d'une information sur la précision $p$ de l'appareil de mesure qui nous indique que les valeurs données par cet instrument sont «à $p$ près». On peut alors imaginer que les valeurs possiblement données par l'instrument sont dans un intervalle de largeur $2p$ autour de la valeur relevée, tirer aléatoirement $N$ valeurs dans cet intervalle (toutes les valeurs de l'intervalle étant équiprobables) et calculer l'écart-type sur l'échantillon ainsi constitué. Cela conduit à $\sigma = \frac{p}{\sqrt{3}}$, ce qui donne l'incertitude.

Vérifier ce lien entre $p$ et $\sigma$ en utilisant les fonctions de la partie 2. Prendre $m = 100$ et $p = 1$ (donc $l = 2$) et un million de tirages.

Remarquons que l'on peut facilement établir ce résultat par le calcul.

### 3.2 Incertitudes composées

Imaginons que la valeur d'une grandeur physique $val3$ soit issue de deux valeurs $val1$ et $val2$ mesurées sur des appareils et dont on doit faire le produit, donc $val3 = val1 \times val2$ (par exemple $v = d \times t$). Les valeurs mesurées de $val1$ et $val2$ sont notées respectivement $m1$ et $m2$, et les précisions des appareils $p1$ et $p2$.

On prendra $m1 = 200$ et $m2 = 500$, $p1 = 2$, $p2 = 3$. Déterminer les incertitudes pour $val1$, $val2$ et $val3$ ainsi que les incertitudes relatives et afficher l'histogramme des valeurs de $val3$.

### 3.3 Application

On détermine une valeur de résistance par le biais de la loi d'ohm. On relève une valeur de $12,63V$ pour la tension et $18,7mA$ pour l'intensité. La précision du voltmètre est de $0,02V$ et celle de l'ampèremètre de $0,1mA$. Déterminer la valeur de la résistance et l'incertitude.

## 4 Distribution gaussienne

### 4.1 Fonction gaussienne

Une fonction gaussienne, caractérisée par sa valeur moyenne $m$ et son écart-type $\sigma$ est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Ecrire une fonction *gaussienne* qui prend en arguments $m$ et *sigma* et renvoie une fonction gaussienne avec ces paramètres. L'utiliser pour obtenir une représentation graphique avec $m = 10$ et $sigma = 1$ sur l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

### 4.2 Vers la distribution gaussienne

Ecrire une fonction *somme_n* qui prend en arguments une fonction de répartition $f$ ainsi qu'un entier $n$ et renvoie une fonction de répartition correspondant à $f$ sommée $n$ fois. En prenant à chaque fois 100000 tirages, créer les échantillons avec pour fonction $f$ *intervalle(0,1)* et $n$ variant de 1 à 10 et afficher leurs histogrammes (prendre 100 subdivisions). Observer les allures des histogrammes successifs.

### 4.3 Théorème central limite

On constate que plus on augmente $n$ (c'est à dire que l'on considère la distribution associée à la somme d'un nombre de plus en plus élevé de variables tirées aléatoirement sur un intervalle avec une probabilité uniforme) et plus on se rapproche d'une distribution gaussienne (qui suit une fonction de gauss).

Mathématiquement, ce résultat est connu sous le nom de *théorème central limite*. Physiquement (et également en chimie, biologie...) on retrouve très souvent ce type de distribution car de nombreux phénomènes réels résultent de la combinaison de plusieurs paramètres qui fluctuent aléatoirement autour d'une certaine valeur.

Obtenir un échantillon comme précédemment, pour $n = 10$ et avec 1000000 tirages. Afficher son histogramme, puis déterminer son écart type, et s'en servir pour afficher la fonction de gauss correspondante et comparer avec l'histogramme.