TP numérique

Méthode d'Euler

1 Méthode d'Euler

Cette partie ne comporte pas de questions. Il est cependant conseillé de tester le code et les exemples proposés.

La plupart des équations différentielles qui modélisent les phénomènes physiques n'ont pas de solution analytique connue. Il est cependant possible de déterminer numériquement une approximation d'une solution, ce qui est extrêmement utile pour la physique, une solution exacte servant souvent à calculer des valeurs numériques !

On présente ici la démarche pour des des équations différentielles du premier ordre, on pourra ensuite étendre cette démarche à des équations d'ordre 2 ou plus. On considère donc, sur un intervalle $[a, b]$, une équation de la forme :

$$y' = f(t, y)$$

Et on se donne une condition aux limites $y(a) = y_0$.

1.1 Principe

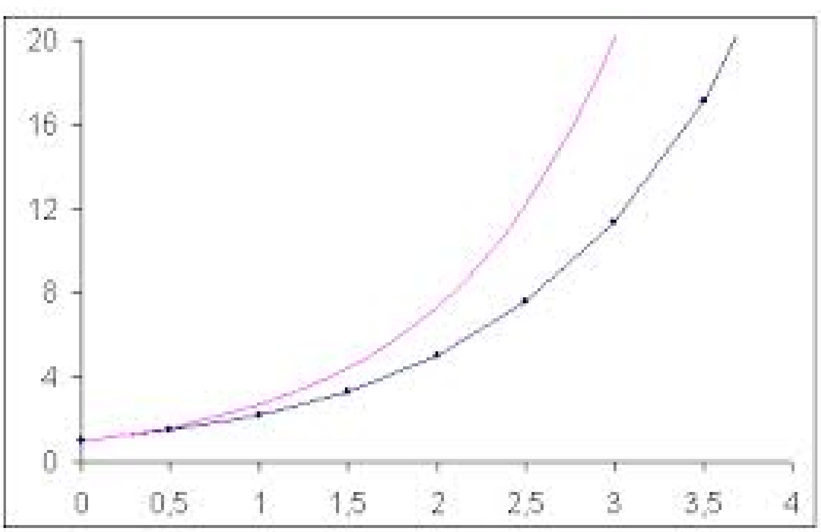
L'idée est de définir un certain pas h (qui représente une certaine variation de t) et, partant de la valeur $y(a)$ donnée par la condition initiale, de calculer de proche en proche les valeurs successives $y(a + h)$, $y(a + 2h)$ etc...
On calcule donc, sur l'intervalle $[a, b]$, $\frac{b-a}{h}$ valeurs.
Pour établir la relation permettant de calculer les valeurs successives on se base sur la définition du nombre dérivé :

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h}$$

Si h est suffisamment petit, le nombre dérivé peut être approché par le taux d'accroissement : $y'(t) \simeq \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$, soit $y(t + h) \simeq y(t) + h\, y'(t)$.
Si on note y_i les valeurs successives de la solution approchée, on aura donc :

$$y_{i+1} = y_i + h\, y'(t_i, y_i) = y_i + h\, f(t_i, y_i)$$

On peut illustrer ceci graphiquement : pour chaque intervalle de largeur h, on prolonge la tangente à partir du début de l'intervalle et elle donne la valeur suivante à la fin de l'intervalle.



1.2 Mise en oeuvre

On définit une fonction *euler* qui prend en arguments :

— une fonction f

— deux nombres a et b, les bornes de l'intervalle

— la valeur de y en a, notée y_0

— le pas h

On renvoie la réponse sous forme d'un tuple de deux listes, qui représentent respectivement les temps et les positions :

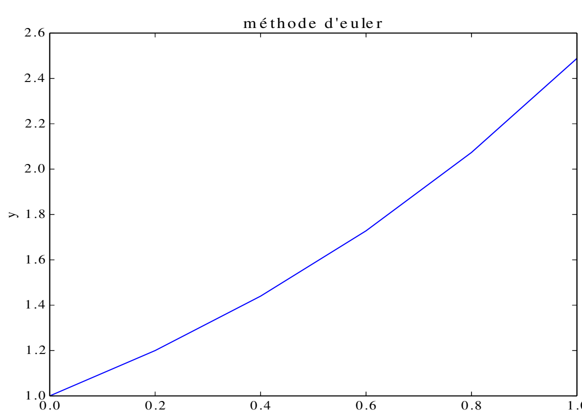
```
def euler(f,a,b,y0,h) :
    liste_t = [a]
    liste_y = [y0]
    t = a
    y = y0
    while t < b-h :
        y = y + h * f(t,y)
        t = t + h
        liste_t.append(t)
        liste_y.append(y)
    return liste_t,liste_y
```

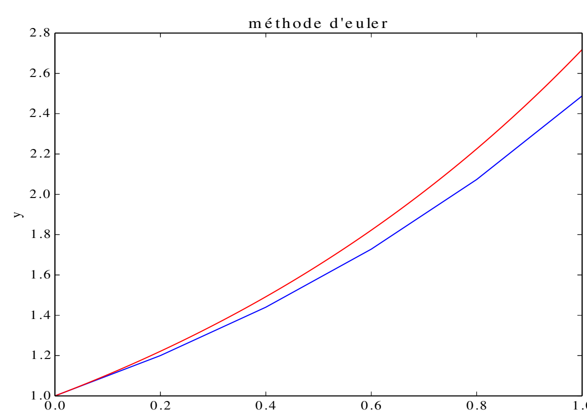
Pour faire appel à cette fonction *euler* il faudra préalablement définir une fonction f qui caractérise l'équation différentielle que l'on veut résoudre. Par exemple, pour l'équation différentielle $y' = y$, f est définie par $f : t, y \to y$. Pour obtenir le graphe sur l'intervalle $[1, 2]$ avec un pas de 0,2 et une condition aux limites $y(1) = 1$ on utilise :

```
import matplotlib.pyplot as plt
def f(t,y) :
    return y
s = euler(f,0,1,1,0.2)
plt.plot(s[0],s[1])
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y")
plt.title("methode d'euler")
plt.show()
```

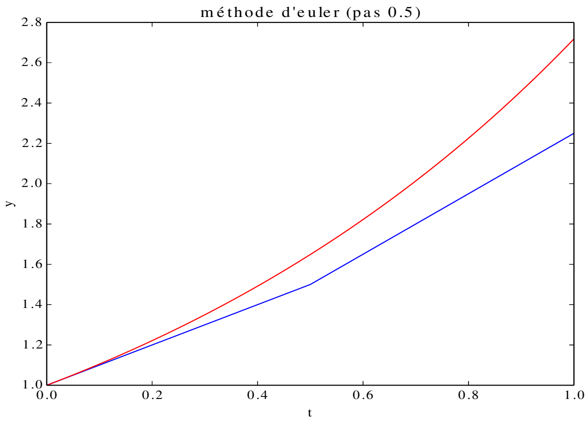
1.3 Résultats

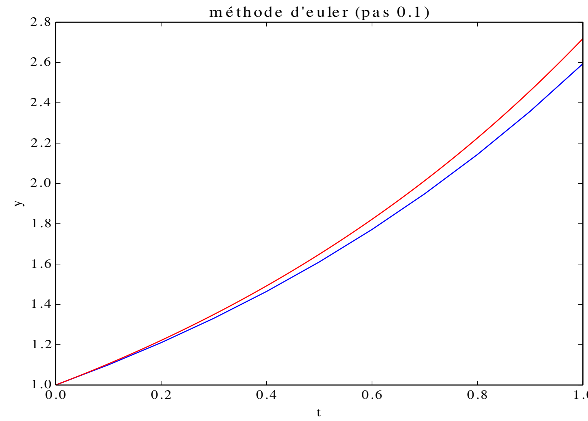
Le script précédent donne le résultat ci dessous (tel quel, et en superposant le graphe de la fonction exponentielle) :

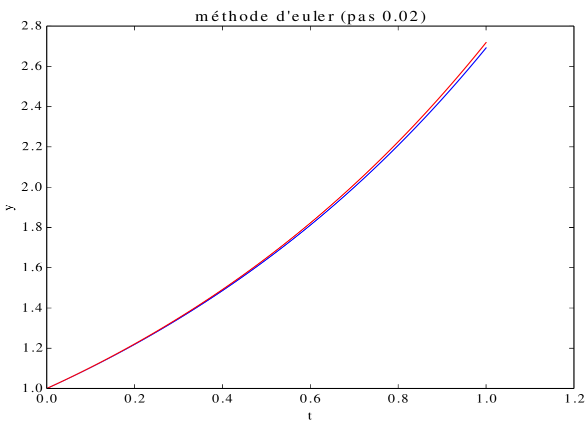


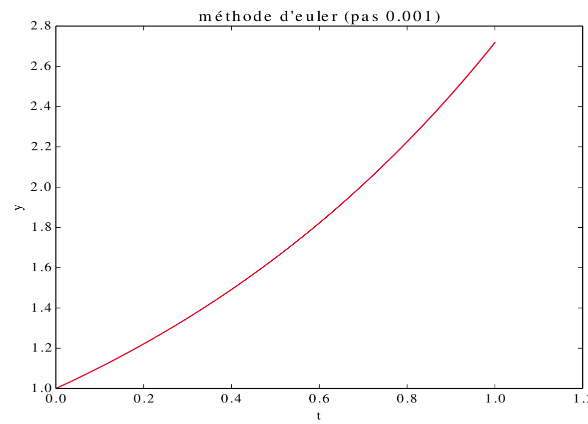


On va bien sur, toutes choses égales par ailleurs, améliorer la précision des résultats en diminuant le pas :









L'inconvénient est que l'on augmente ainsi le nombre d'itérations, et donc le temps de calcul (la complexité est clairement linéaire en $n = \frac{b-a}{h}$), il faut souvent faire des compromis entre précision et temps de calcul raisonnable.

2 Pendule simple

Le but de cette partie est d'obtenir par une méthode numérique une solution approchée de l'équation différentielle vérifiée par la position angulaire du pendule :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

Dans toute la suite on prendra $\omega_0 = 10 rad.s^{-1}$ et les valeurs de θ seront considérées comme des valeurs en radians. L'angle θ sera appelé la *position*, et sa dérivée par rapport au temps la *vitesse*.

2.1 Equation linéarisée

On s'intéresse d'abord à l'équation linéarisée, pertinente pour décrire de petites oscillations :

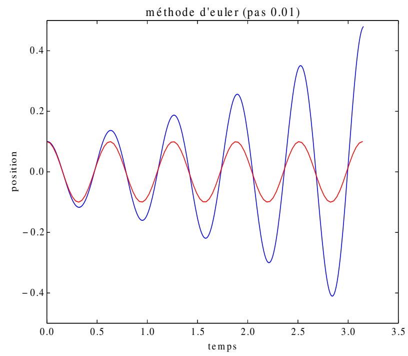
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\, \theta = 0$$

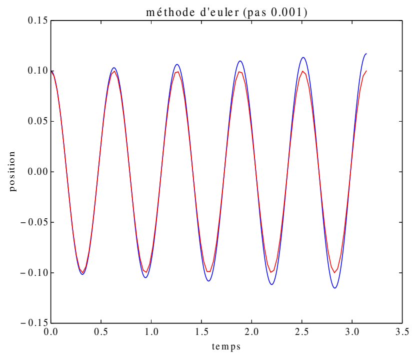
Pour résoudre, on utilise le schéma suivant (on note x la position et v la vitesse) :

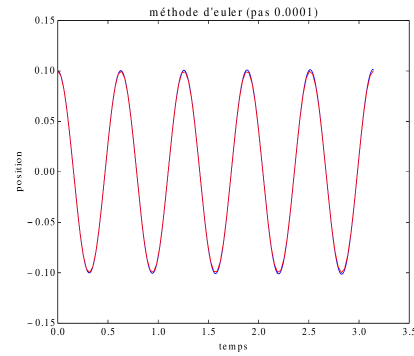
$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + v_i\, \varepsilon \\ v_{i+1} = v_i - \omega_0^2 x_i\, \varepsilon \end{cases}$$

1. Expliquer l'origine de ces relations et donner leur signification physique. Que représente ϵ ?

2. Ecrire une fonction *solve* qui prend en arguments la pulsation ω_0, le pas, deux nombres représentant les bornes de l'intervalle et deux nombres qui donnent les conditions initiales ; et qui renvoie un tuple de trois listes contenant respectivement les temps, les positions et les vitesses.
3. Utiliser cette fonction pour obtenir la solution numérique avec un pas de 0,001s, sur 5 périodes, avec les conditions initiales :
$$\begin{cases} x(t=0) = 0,1 \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$$
4. Tracer sur un même graphe cette solution numérique et la solution analytique correspondant au même problème.
5. Faire de même avec un pas dix fois plus grand et dix fois plus petit, comparer les résultats obtenus.







2.2 Méthode d'Euler améliorée

On utilise maintenant un nouveau schéma :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + v_i\,\varepsilon \\ v_{i+1} = v_i - \omega_0^2 x_{i+1}\,\varepsilon \end{cases}$$

1. Implémenter ce schéma dans une nouvelle fonction (avec les mêmes entrées / sorties que précédemment).
2. Refaire les mêmes tests et constater une nette amélioration des résultats !
3. Expliquer en quoi consiste la différence entre les deux schémas.

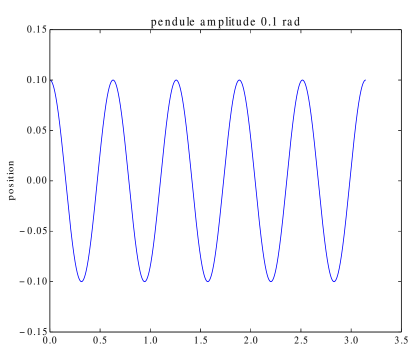
Dans toute la suite on utilisera cette méthode améliorée avec un pas de 0,001.

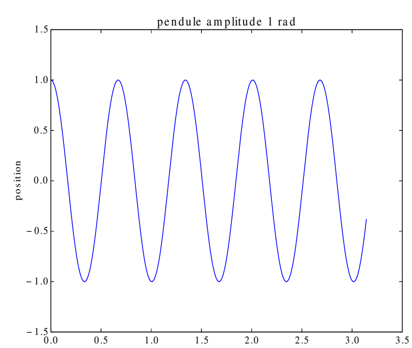
2.3 Equation non linéaire

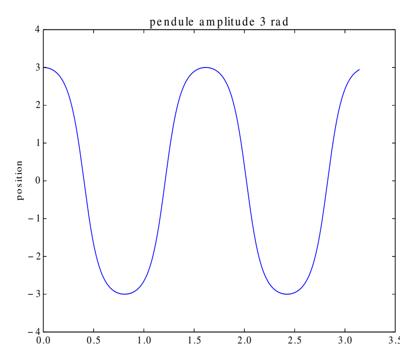
On reprend l'équation initiale, non linéaire et pour laquelle on ne dispose pas de solution analytique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

Résoudre numériquement pour les trois conditions initiales suivantes : vitesse nulle et position de 0,1 ; 1 et 3 *rad*.







2.4 Non isochronisme des oscillations

On s'intéresse ici à l'évolution de la période avec l'amplitude des oscillations.

1. Ecrire une fonction qui prend comme arguments une liste des temps et une liste des positions et qui renvoie une valeur approchée de la période (faire attention au problème de la comparaison à 0 avec les flottants).
2. Tracer une courbe représentant la valeur approchée de la période en fonction de l'amplitude pour des amplitudes comprises entre 0 et π.
3. Comment pouvait-on prévoir la valeur de la période pour les faibles amplitudes ?
4. Commenter l'expression *non isochronisme des oscillations*.