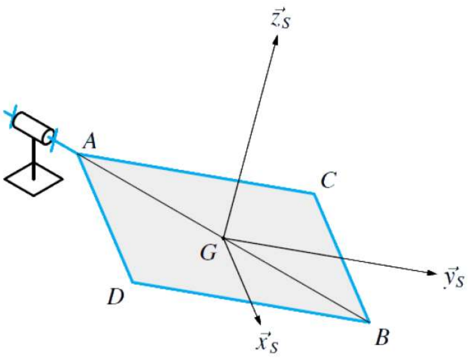
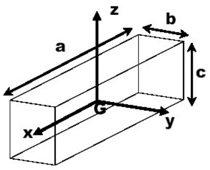
Trappe

On s'intéresse à une trappe S de forme rectangulaire manœuvrée en rotation autour d'une de ses diagonales :





$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La trappe S est une plaque rectangulaire homogène de masse m et de centre de masse G. On lui associe les repères $R_s = (G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ et $R_{2s} = (G, \overrightarrow{x_{2s}}, \overrightarrow{y_{2s}}, \overrightarrow{z_{2s}})$ tel que $\theta = (\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{x_{2s}}) = (\overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{y_{2s}})$. Cette trappe est en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_{2s}})$ avec le bâti **0** tel que $\alpha = (\vec{z}, \overrightarrow{z_{2s}}) = (\vec{y}, \overrightarrow{y_{2s}})$ où $R_0 = (G, \overrightarrow{x_{2s}}, \vec{y}, \vec{z})$.

On pose $\overrightarrow{AC} = 2l\overrightarrow{y_s}$ et $\overrightarrow{AD} = 2L\overrightarrow{x_s}$.

Q.1. **Donner la forme de la matrice d'inertie $[I]_{G,S}$ dans la base $(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$. On notera A_s, B_s, C_s, D_s, E_s et F_s les termes de cette matrice. La matrice d'inertie d'un parallélépipède est donnée ci-dessus.**

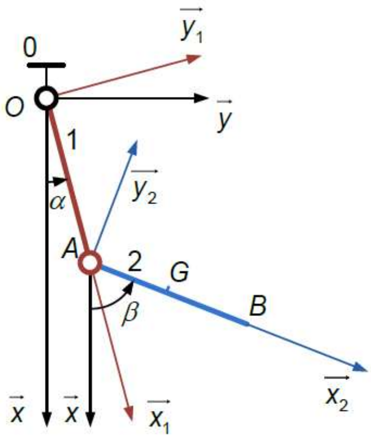
Q.2. **Déterminer au point G les éléments de réduction du torseur cinétique $\{C_{s/0}\}$ (c'est-à-dire le torseur cinétique $\{C_{s/0}\}$).**

Q.3. **Déterminer au point G les éléments de réduction du torseur dynamique $\{D_{s/0}\}$.**

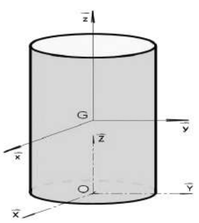
Bras de robot (double pendule)

On s'intéresse à un pendule double oscillant dans le plan vertical $(O, \vec{x}, \vec{y})$ du repère fixe $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti **0**.

Ce pendule est constitué de deux tiges cylindriques **1** et **2** identiques homogènes de masse m, de longueur $2a$ et de dimensions transversales négligeables devant leur longueur.



La matrice d'inertie d'un cylindre est donnée :



$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}R^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La tige **1**, d'extrémités O et A est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti **0**. On note $R_1 = (O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\vec{z})$ un repère lié à **1**, tel que $\overrightarrow{OA} = 2a\overrightarrow{x_1}$ et on pose $\alpha = (\vec{x},\overrightarrow{x_1})$.

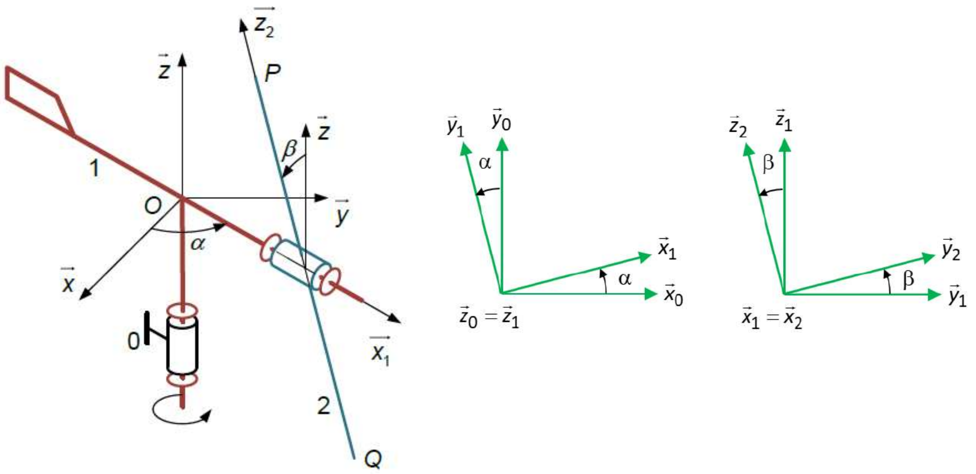
La tige **2**, d'extrémités A et B est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$ avec la tige **1**. On note $R_2 = (A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\vec{z})$ un repère lié à **2**, tel que $\overrightarrow{AB} = 2a\overrightarrow{x_2}$ et on pose $\beta = (\vec{x},\overrightarrow{x_2})$.

On note G le centre d'inertie de la tige **2** situé au milieu du segment AB et G_1 celui de la tige **1** situé au milieu du segment OA.

Q.1. **Donner l'expression de la matrice d'inertie de la tige 2 au point G dans la base B_2.**
Q.2. **Déterminer le moment cinétique, au point A, de la tige 2 par rapport au bâti 0.**
Q.3. **Déterminer le moment dynamique, au point A, de la tige 2 par rapport au bâti 0.**
Q.4. **Déterminer le moment dynamique, au point O, de l'ensemble des deux tiges 1 et 2 par rapport au bâti 0.**

Éolienne

On s'intéresse à une éolienne dont le modèle cinématique est donné.



Soit $R_0 = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère lié au mât fixe **0** de l'éolienne. La girouette **1** est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le mât **0**. Le repère $R_1 = (O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\vec{z})$ est lié à la girouette, on a $\vec{z} = \overrightarrow{z_1}$ et on pose $\alpha = (\vec{x},\overrightarrow{x_1})$.

On note I le moment d'inertie de la girouette **1** par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$.

L'hélice **2**, de centre d'inertie G et de masse M, est en liaison pivot d'axe $(G,\overrightarrow{z_1})$ avec la girouette **1** avec $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_1}$ où a est une constante positive. On lui associe le repère $R_2 = (O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ de telle façon que l'axe $(G,\overrightarrow{z_2})$ soit confondu avec l'axe QP et on pose $\beta = (\vec{z},\overrightarrow{z_2})$.

On donne $[I]_{G,2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}}$

On considère qu'il existe un balourd **3** de masse m, modélisant un déséquilibre de l'hélice en rotation, représenté par une masse ponctuelle au point P. On pose $\overrightarrow{GP} = b\overrightarrow{z_2}$ avec b une constante positive.

Q.1. **Déterminer le moment cinétique, au point O et en projection sur $\vec{z}$, de la girouette 1 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}\cdot\vec{z}$.**
Q.2. **Déterminer le moment cinétique, au point O, de l'hélice 2 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}$.**

Q.3. En déduire le moment dynamique, au point $\boldsymbol{O}$ et en projection sur $\vec{z}$, de l'hélice 2 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}.\vec{z}$.

Q.4. Déterminer le moment cinétique, au point $\boldsymbol{O}$ du balourd 3 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}}$.