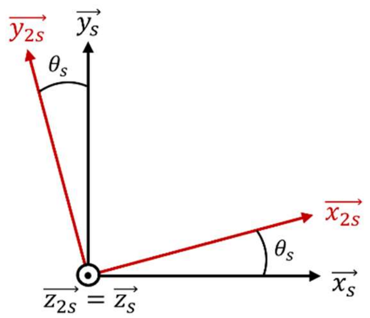
Trappe

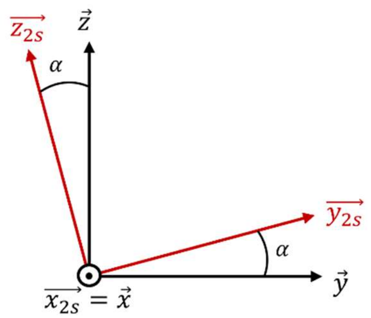
Q.1. **Donner la forme de la matrice d'inertie $[I]_{G,S}$ dans la base $(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$. On notera A_s, B_s, C_s, D_s, E_s et F_s les termes de cette matrice. La matrice d'inertie d'un parallélépipède est donnée ci-dessus.**

Il y a trois plans de symétrie : $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{z_s})$, $(G, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$ et $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s})$ d'où : $D_s = E_s = F_s = 0$. On identifie les dimensions de la trappe par rapport à la matrice donnée : $c = e$, $b = 2l$ et $a = 2L$ or $e \ll l, L$.

Il vient : $[I]_{G,S} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{bmatrix}_{G,B_s} = m \begin{bmatrix} \frac{c^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2+d^2}{3} \end{bmatrix}_{G,B_s} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & A_s + B_s \end{bmatrix}_{G,B_s}$

Q.2. **Déterminer au point G les éléments de réduction du torseur cinétique $\{C_{s/0}\}$ (c'est-à-dire le torseur cinétique $\{C_{s/0}\}$).**





D'où $\overrightarrow{\Omega_{S/0}} = \dot{\alpha}\vec{x} = \dot{\alpha}\overrightarrow{x_{2s}} =$

Il vient alors $\overrightarrow{\sigma_{G,S/0}} = m.\overrightarrow{GG} \wedge \overrightarrow{V_{G \in S/0}} + [I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/0}} = \vec{0} + [I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$

ATTENTION il faut que la matrice et le vecteur vitesse de rotation soient exprimés dans la même base ! Ainsi $\overrightarrow{\Omega_{S/0}} = \dot{\alpha}(\cos(\theta_s)\,\overrightarrow{x_s} + \sin(\theta_s)\,\overrightarrow{y_s})$ et $\overrightarrow{\sigma_{G,S/0}} = \dot{\alpha}[A_s\cos(\theta_s)\,\overrightarrow{x_s} + B_s\sin(\theta_s)\,\overrightarrow{y_s}]$

De plus $\overrightarrow{p_{S/0}} = \vec{0}$ car G est sur l'axe de la liaison pivot donc $\overrightarrow{V_{G \in S/0}} = \vec{0}$.

Q.3. **Déterminer au point G les éléments de réduction du torseur dynamique $\{D_{s/0}\}$.**

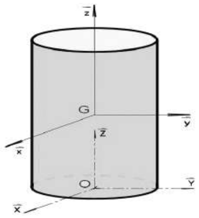
Dans un premier temps : $\overrightarrow{R_{d(S/0)}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}} = \vec{0}$

Ensuite, **au point G**, il suffit de dériver le moment cinétique (utiliser la formule de Bour pour calculer la dérivée des vecteurs $\overrightarrow{x_s}$ et $\overrightarrow{y_s}$) :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S/0}}}{dt}\right]_{R_0} = A_s\ddot{\alpha}\cos(\theta_s)\,\overrightarrow{x_s} + B_s\ddot{\alpha}\sin(\theta_s)\,\overrightarrow{y_s} + \dot{\alpha}^2\cos(\theta_s)\sin(\theta_s)\,(B_s - A_s)\overrightarrow{z_s}$$

Bras de robot (double pendule)

Q.1. **Donner l'expression de la matrice d'inertie de la tige 2 au point $\boldsymbol{G}$ dans la base $\boldsymbol{B_2}$.**



$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}R^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ici, le rayon est négligeable et l'axe de révolution est suivant $\vec{x}$:

$$[I]_{G,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}_{G,B_2}$$

Q.2. **Déterminer le moment cinétique, au point $\boldsymbol{A}$, de la tige 2 par rapport au bâti 0.**

Pour cela, déterminons le moment cinétique au point G :

$$\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = [I]_{G,2}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \frac{ma^2}{3}\dot{\beta}\vec{z}$$

Ainsi que la résultante cinétique pour utiliser la relation de Varignon :

$$\overrightarrow{p_{2/0}} = m.\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}$$

G appartient physiquement à 2, on peut dériver et avec la formule de Bour il vient :

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG})}{dt}\right]_{R_0} = a\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{R_0} + 2a\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = a\dot{\beta}\vec{z}\wedge\overrightarrow{x_2} + 2a\dot{\alpha}\vec{z}\wedge\overrightarrow{x_1} = a\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + 2a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

Enfin d'après la formule de Varignon :

$$\overrightarrow{\sigma_{A,2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} + \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{p_{2/0}}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{A,2/0}} = \frac{ma^2}{3}\dot{\beta}\vec{z} + a\overrightarrow{x_2}\wedge m(a\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + 2a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1})$$

$$\overrightarrow{\sigma_{A,2/0}} = \left(\frac{ma^2}{3}\dot{\beta} + 2ma^2\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + ma^2\dot{\beta}\right)\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{A,2/0}} = \left(\frac{4ma^2}{3}\dot{\beta} + 2ma^2\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\right)\vec{z}$$

Q.3. **Déterminer le moment dynamique, au point $\boldsymbol{A}$, de la tige 2 par rapport au bâti 0.**

On a deux options, soit par définition :

$$\overrightarrow{\delta_{A,2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A,2/0}}}{dt}\right]_{R_0} + m\overrightarrow{V_{A\in 2/0}}\wedge\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}$$

Soit par changement de point (Varignon) :

$$\overrightarrow{\delta_{A,2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G,2/0}} + \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{R_{d(2/0)}}$$

La seconde option est peut-être la plus simple :

- $\overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{ma^2}{3}\ddot{\beta}\vec{z}$
- $\overrightarrow{R_{d(2/0)}} = \left[\frac{d\overrightarrow{p_{2/0}}}{dt}\right]_{R_0} = m(a\ddot{\beta}\overrightarrow{y_2} + 2a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\beta}^2\overrightarrow{x_2} - 2a\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1})$

Il vient :

$$\overrightarrow{\delta_{A,2/0}} = \left(\frac{ma^2}{3}\ddot{\beta} + ma^2\big(2\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + 2\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) + \ddot{\beta}\big)\right)\vec{z}$$
$$\overrightarrow{\delta_{A,2/0}} = 2ma^2\left(\frac{2}{3}\ddot{\beta} + \ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + \dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha)\right)\vec{z}$$

Q.4. **Déterminer le moment dynamique, au point $\boldsymbol{O}$, de l'ensemble des deux tiges 1 et 2 par rapport au bâti 0.**

$$\overrightarrow{\delta_{O,1+2/0}} = \overrightarrow{\delta_{O,2/0}} + \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$$

- Déterminons $\overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$

O est un point fixe dans 0, ainsi :

$$\overrightarrow{V_{O,1/0}} = \vec{0} \text{ d'où } \overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt}\right]_0$$

D'après Varignon :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} + \overrightarrow{OG_1} \wedge \overrightarrow{p_{1/0}}$$

Et $\overrightarrow{p_{1/0}} = m\overrightarrow{V_{G_1,1/0}} = m\big(\overrightarrow{G_1O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\big) = m(-a\overrightarrow{x_1} \wedge \dot{\alpha}\vec{z}) = ma\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$

Par symétrie des raisonnements :$[I]_{G_1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}_{G,B_1}$ de plus G_1 est le centre de gravité de 1

d'où : $\overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} = [I]_{G_1,1}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{ma^2}{3}\dot{\alpha}\vec{z}$

Enfin : $\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \frac{ma^2}{3}\dot{\alpha}\vec{z} + a\overrightarrow{x_1} \wedge ma\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\alpha}\vec{z}$

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \frac{4}{3}ma^2\ddot{\alpha}\vec{z}$$

- Déterminons $\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}$:

D'après Varignon :

$$\overrightarrow{\delta_{O,2/0}} = \overrightarrow{\delta_{A,2/0}} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R_{d(2/0)}}$$

Et

$$\overrightarrow{\delta_{A,2/0}} = 2ma^2\left(\frac{2}{3}\ddot{\beta} + \ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + \dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha)\right)\vec{z}$$
$$\overrightarrow{R_{d(2/0)}} = m(a\ddot{\beta}\overrightarrow{y_2} + 2a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\beta}^2\overrightarrow{x_2} - 2a\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1})$$

D'où $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R_{d(2/0)}} = 2a\overrightarrow{x_1} \wedge m\big(a\ddot{\beta}\overrightarrow{y_2} + 2a\ddot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - a\dot{\beta}^2\overrightarrow{x_2} - 2a\dot{\alpha}^2\overrightarrow{x_1}\big)$

$= 2ma^2\big(\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha) + 2\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2\sin(\beta-\alpha)\big)\vec{z}$

Soit : $\overrightarrow{\delta_{O,2/0}} = 2ma^2\left(\cos(\beta-\alpha)\,(\ddot{\beta}+\ddot{\alpha}) + 2\ddot{\alpha} + \frac{2}{3}\ddot{\beta} + \sin(\beta-\alpha)\,(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2)\right)\vec{z}$

Enfin :

$$\overrightarrow{\delta_{O,1+2/0}} = 2ma^2\left(\cos(\beta-\alpha)\left(\ddot{\beta}+\ddot{\alpha}\right)+\frac{10}{3}\ddot{\alpha}+\frac{2}{3}\ddot{\beta}+\sin(\beta-\alpha)\left(\dot{\alpha}^2-\dot{\beta}^2\right)\right)\vec{z}$$

Éolienne

Q.1. **Déterminer le moment cinétique, au point O et en projection sur $\vec{z}$, de la girouette 1 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}.\vec{z}$.**

$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}.\vec{z} = I\dot{\alpha}$ car O est fixe par rapport à **0**.

Q.2. **Déterminer le moment cinétique, au point O, de l'hélice 2 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}$.**

On connait la matrice d'inertie de 2 au point G, on calcule d'abord $\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}}$ puis on utilise Varignon :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} + \overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{p_{2/0}}$$

- $\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = [I]_{G,2}.\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$, attention à exprimer les deux dans la même base !!
  - $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\sin(\beta)\\ \dot{\alpha}\cos(\beta)\end{bmatrix}_{B_2}$
  - $\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}_{B_2}.\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\sin(\beta)\\ \dot{\alpha}\cos(\beta)\end{bmatrix}_{B_2} = A\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + B\dot{\alpha}\sin(\beta)\overrightarrow{y_2} + C\dot{\alpha}\cos(\beta)\overrightarrow{z_2}$
- $\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{p_{2/0}}$
  - $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_1}$
  - $\overrightarrow{p_{2/0}} = M\overrightarrow{V_{G,2/0}} = Ma\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$
  - $\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{p_{2/0}} = Ma^2\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1}$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}} = A\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + B\dot{\alpha}\sin(\beta)\,\overrightarrow{y_2} + C\dot{\alpha}\cos(\beta)\,\overrightarrow{z_2} + Ma^2\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1}$$

Q.3. **En déduire le moment dynamique, au point O et en projection sur $\vec{z}$, de l'hélice 2 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}.\vec{z}$.**

Comme O est un point fixe dans **0** :

$$\overrightarrow{\delta_{O,2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}}{dt}\right]_{R_0}$$

Soit

$$\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}.\vec{z} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}}{dt}\right]_{R_0}.\vec{z}$$

Et $\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}}{dt}\right]_{R_0}.\vec{z} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}.\vec{z}}{dt}\right]_{R_0}$ car $\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}.\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0} = 0$

Aussi $\overrightarrow{\sigma_{O,2/0}}.\vec{z} = A\dot{\beta}\times 0 + B\dot{\alpha}\sin(\beta)\times\sin(\beta) + C\dot{\alpha}\cos(\beta)\times\cos(\beta) + Ma^2\dot{\alpha}$

$$\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}.\vec{z} = \left[\frac{d(B\dot{\alpha}\sin^2(\beta) + C\dot{\alpha}\cos^2(\beta) + Ma^2\dot{\alpha})}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}.\vec{z} = B\ddot{\alpha}\sin^2(\beta) + C\ddot{\alpha}\cos^2(\beta) + Ma^2\ddot{\alpha} + 2B\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)\cos(\beta) - 2C\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)\cos(\beta)$$

$$\overrightarrow{\delta_{O,2/0}}.\vec{z} = B\ddot{\alpha}\sin^2(\beta) + C\ddot{\alpha}\cos^2(\beta) + Ma^2\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)\cos(\beta)\,(B - C)$$

Q.4. **Déterminer le moment cinétique, au point $\boldsymbol{O}$ du balourd 3 par rapport au support 0 : $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_{O,3/0}}}$.**

Au point P la matrice d'inertie est nulle car toute la masse est ponctuelle et P est aussi le centre de gravité de 3. Donc $\overrightarrow{\sigma_{P,3/0}} = \vec{0}$.

D'après la relation de Varignon :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} = \vec{0} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{p_{3/0}}$$

- $\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \overrightarrow{V_{P,3/2}} + \overrightarrow{V_{P,2/0}} = \vec{0} + \overrightarrow{V_{G,2/0}} + \overrightarrow{PG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - b\overrightarrow{z_2} \wedge \left(\dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_1}\right)$
    - $\overrightarrow{V_{P,3/0}} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - b\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + b\,sin(\beta)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}$
- $\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} = (a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{z_2}) \wedge m\left(a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - b\dot{\beta}\overrightarrow{y_2} + b\,sin(\beta)\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}\right)$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} = m(\dot{\alpha}\overrightarrow{z_1}a^2 + \left(b^2\dot{\beta} - ab\dot{\alpha}\cos(\beta)\right)\overrightarrow{x_1} + b^2 sin(\beta)\dot{\alpha}\overrightarrow{y_2} - ab\dot{\alpha}\overrightarrow{z_2})$$