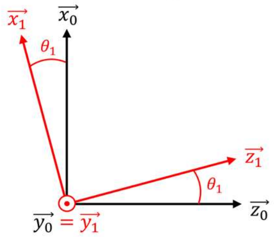
Étude cinématique de la voiture de modélisme

1. Vitesses et accélérations

Q.1. Faire la figure de changement de base entre $\boldsymbol{B_1}$ et $\boldsymbol{B_0}$.



Q.2. Par application du RSG en $\boldsymbol{I}$, donner l'expression de la vitesse du point $\boldsymbol{A}$ appartenant à la roue 1 dans son mouvement par rapport à $\boldsymbol{B_0}$ en fonction des paramètres.

Le RSG donne : $\overrightarrow{V_{I,1/0}} = \vec{0}$ or $\overrightarrow{V_{I,1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{IA} \wedge \dot{\theta}_1 \overrightarrow{y_0}$. D'où $\overrightarrow{V_{A,1/0}} = \frac{D_{roue}}{2} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_0}$.

Q.3. Donner l'expression de l'accélération de $\boldsymbol{A}$ appartenant à la roue 1 dans son mouvement par rapport à $\boldsymbol{B_0}$ en fonction des paramètres.

Il suffit de dériver : $\overrightarrow{\Gamma_{A,1/0}} = \frac{D_{roue}}{2} \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{x_0}$.

Q.4. Donner l'expression de la vitesse du point $\boldsymbol{B}$ appartenant à la roue 1 dans son mouvement par rapport à $\boldsymbol{B_0}$.

Comme pour la question 2, on trouve $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = D_{roue} \dot{\theta}_1 \overrightarrow{x_0} = 2\overrightarrow{V_{A,1/0}}$.

Q.5. Donner l'expression du rapport de réduction $\boldsymbol{r_T}$ entre l'arbre du moteur et la roue (ou du cardan). Expliquer la démarche et faire l'application numérique.

On a $\frac{\omega_{cp}}{\omega_{PM}} = -\frac{R_{PM}}{R_{cp}}$ et $\omega_{R1} = r_{BT}.\omega_{BT} = r_{BT}\omega_{cp}$. On en déduit $\omega_{R1} = -r_{BT}\frac{R_{PM}}{R_{cp}}\omega_{PM}$ or $r_T = \frac{\omega_{R1}}{\omega_{PM}}$ car $\omega_{PM} = \omega_M$. Soit $r_T = -r_{BT}\frac{R_{PM}}{R_{cp}} = 8{,}82.10^{-2}$.

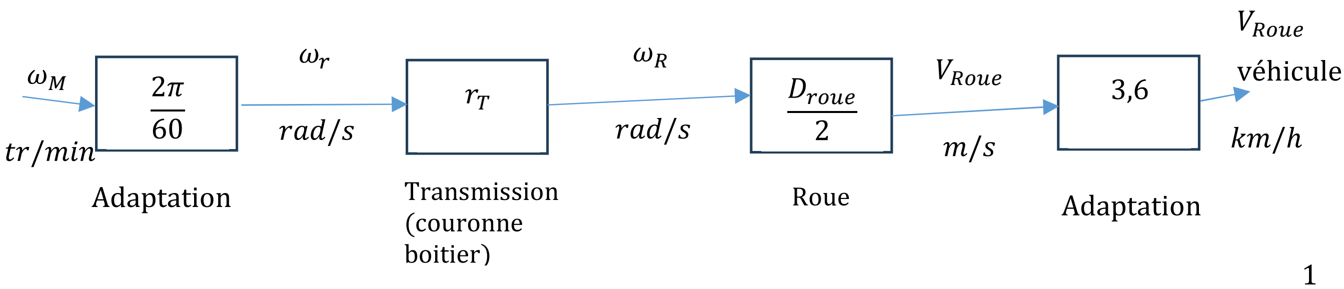
Q.6. Donner l'expression de $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\epsilon 1/0}}}$ en fonction de la vitesse de rotation du moteur $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega_M}}$ et des paramètres. Sachant que le moteur peut tourner à $\boldsymbol{18\,000\ tr/min}$, calculer la vitesse maximum de la voiture.

$$\left\|\overrightarrow{V_{A,1/0}}\right\| = \frac{D_{roue}}{2} r_T \omega_M \text{ soit } \left\|\overrightarrow{V_{A,1/0}}\right\| = 5{,}81 m.s^{-1} = 20{,}9 km.h^{-1}.$$

Q.7. Calculer dans ces conditions la vitesse maximale de $\boldsymbol{B}$. Que vous inspire le résultat obtenu ?

On a $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = 2\overrightarrow{V_{A,1/0}}$ d'où $\left\|\overrightarrow{V_{B,1/0}}\right\| = 41{,}8 km.h^{-1}$.

Q.8. Établir le schéma bloc représentant le calcul de la vitesse de translation de la voiture (exprimée en $\boldsymbol{km/h}$) en fonction de la vitesse de rotation du moteur (exprimée en $\boldsymbol{tr/min}$) en faisant intervenir les paramètres nécessaires. Donner un nom à chacun des blocs et préciser les données et unités transitant entre les blocs. Peut-on simplifier le schéma-bloc obtenu ?



2. Énergétique

On étudie dans cette partie toutes les pièces de la voiture.

Les données du problème sont :

- Masse totale de la voiture : $M_V = 873g$
- Masse d'une roue : $M_R = 30g$
- Inertie d'une roue : $J_R = 3{,}14.10^{-5}kg.m^2$
- Inertie de l'arbre du moteur : $J_M = 3{,}7.10^{-6}kg.m^2$
- Inertie de l'arbre principal : $J_{AP} = 1.10^{-8}kg.m^2$
- Inertie d'un cardan : $J_C = 2.10^{-9}kg.m^2$
- Vitesse de rotation du moteur : $\omega_M = 18\,000\ tr/min$
- Diamètre de roue : $D_{Roue} = 70mm$
- Rapport de réduction $moteur/roue$: $r_{(M/R)}$

Q.9. **Déterminer le rapport de réduction moteur/roue $\boldsymbol{r_{(M/R)}}$ en vous aidant de la description.**

Q.10. **En considérant les différents éléments, calculer l'énergie cinétique de translation de la voiture de modélisme.**

Q.11. **En considérant les différents éléments, calculer l'énergie cinétique de rotation des différentes pièces de la voiture de modélisme. En déduire l'énergie cinétique totale de rotation des pièces de la voiture.**

Q.12. **Calculer l'énergie cinétique totale.**

Q.13. **Calculer le pourcentage des énergies cinétiques de translation et de rotation.**

Q.14. **Que vous inspire ce résultat ?**

Détermination du centre de gravité de la voiture

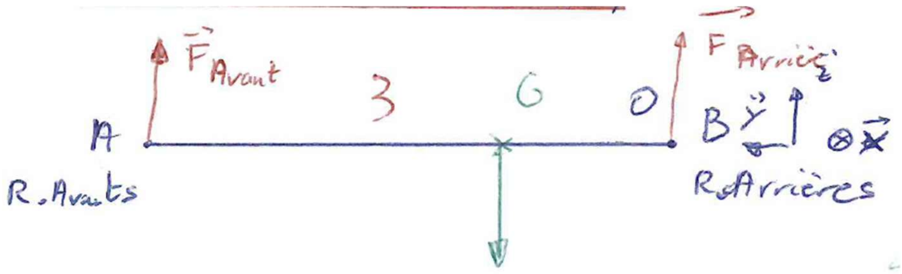
Expérience 1

Q.1. **A partir des données et en utilisant le PFS, déterminer les coordonnées $\boldsymbol{x_G}$ et $\boldsymbol{y_G}$ du centre de gravité de voiture. Préciser les hypothèses et les simplication, faire les schémas et graphes nécessaires, expliquer clairement les démarches et méthodes utilisées.**

1ère solution : On décompose le problème 3D en deux problèmes plans.

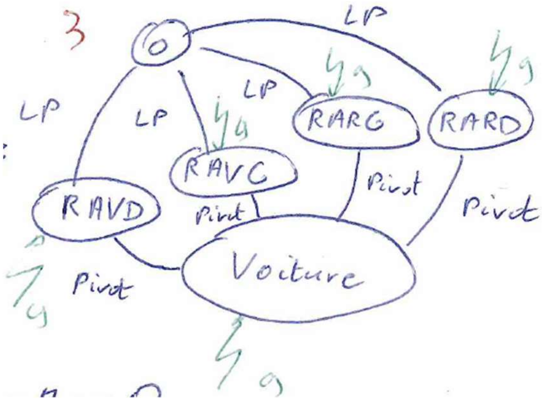
<u>Suivant le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$.</u>

Schéma de principe :



On note A le point pour les roues avant et B celui pour les roues arrière.

Graphe de structure :



On isole la voiture et les roues et on applique le théorème de la résultante statique :

$$F_A + F_B - M_V g = 0$$

$$(M_{AvD} + M_{AvG})g + (M_{ArD} + M_{ArG})g - M_V g = 0$$

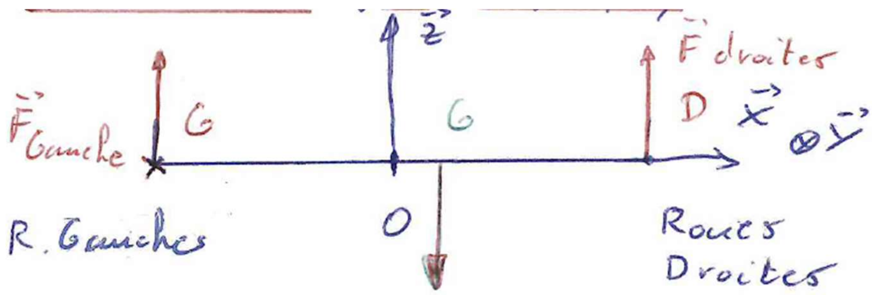
On trouve $M_V = M_{AvD} + M_{AvG} + M_{ArD} + M_{ArG} = 0{,}879kg$, ce qui est proche de la masse de la voiture mesurée ($M_V = 873g$), on confondra les deux.

D'après le théorème du moment statique en O suivant $\vec{x}$:

$$(M_{AvD} + M_{AvG})g.e - M_V g.y_G = 0$$

$$y_G = \frac{(M_{AvD} + M_{AvG}).e}{M_V} = 81mm$$

<u>Suivant le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$.</u>



On note G_a le point pour les roues gauches et D celui pour les roues droites.

Le théorème du moment statique en O suivant $\vec{y}$:

$$M_{gauch}\ \frac{l}{2}g - M_{droite}\frac{l}{2}g + M_V g.x_G = 0$$

$$x_G = \frac{l(M_{AvD} + M_{ArD} - M_{ArG} - M_{AvG})}{2M_V} = -0{,}46mm$$

On peut la considérer symétrique, c'est-à-dire $x_G = 0$.

2ème solution : Résolution « 3D »

L'application du TMS en O donne :

$$\begin{cases} -M_v.g.y_G + M_{AvD}.g.e + M_{AvG}.g.e = 0 \\ M_v.g.x_G - \frac{l}{2}gM_{AvD} - \frac{l}{2}gM_{ArD} + \frac{l}{2}gM_{ArG} + \frac{l}{2}gM_{AvG} = 0 \end{cases}$$

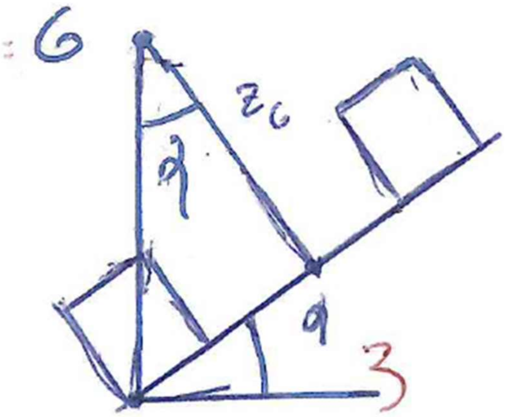
D'où

$$\begin{cases} y_G = \frac{(M_{AvD} + M_{AvG}).e}{M_V} \\ x_G = \frac{l}{2M_V}(M_{AvD} + M_{ArD} - M_{ArG} - M_{AvG} \end{cases}$$

On remarque qu'il s'agit simplement d'un barycentre.

Expérience 2

Q.2. **À partir de cette mesure, déterminer la coordonnée z_G du centre de gravité de la voiture. Expliquer et justifier votre démarche par des schémas clairs et précis.**



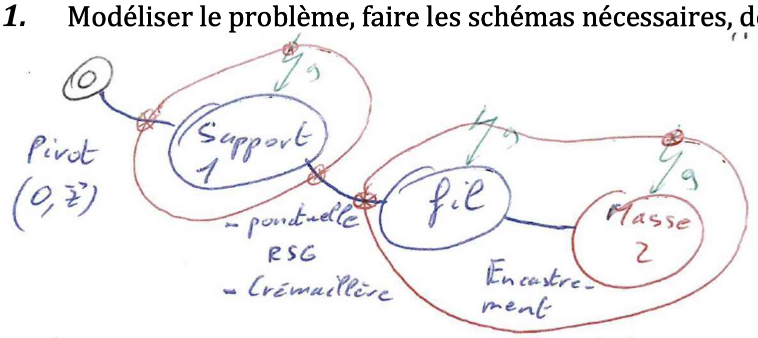
D'après le triangle rectangle on a $\tan(\alpha_b) = \frac{l}{2}\frac{1}{z_G}$.

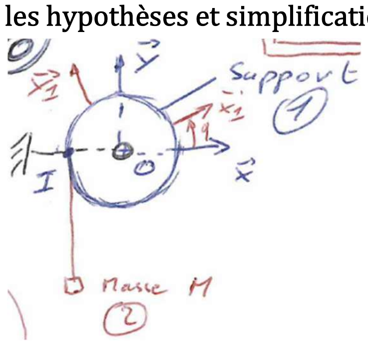
Soit $z_G = 45{,}5mm$.

Détermination de l'inertie d'une roue

1. Détermination du moment l'inertie d'une roue : J_R

Q.1. **Modéliser le problème, faire les schémas nécessaires, définir les hypothèses et simplifications.**





On considère le problème plan, on néglige la masse du fil et on considère les liaisons parfaites.

Q.2. Déterminer le moment d'inertie du support J_S en utilisant la conservation de l'énergie.

La conservation de l'énergie donne : $Mgh = \frac{1}{2}J_S\omega_S^2 + \frac{1}{2}MV_M^2$ avec $V_M = R_S\omega_S$ et $\omega_S = \dot{\alpha}$

Soit $Mgh = \frac{1}{2}J_s\omega_S^2 + \frac{1}{2}MR_S^2\omega_S^2$ d'où $J_s = \frac{M(2gh - R_S^2\omega_S^2)}{\omega_S^2} = \frac{M(2gh - R_S^2\dot{\alpha}^2)}{\dot{\alpha}^2}$.

<u>Application numérique</u> : 1 tour en 0,165s => $\dot{\alpha} = 38{,}1 rad/s$

$$J_s = 1{,}04.10^{-5} kg.m^2$$

Q.3. Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble $\{\boldsymbol{Support}, \boldsymbol{Roue}\}$ $\boldsymbol{J_{SR}}$.

D'après le TEC

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P_{ext\to S} + P_{int}$$

Seule la pesanteur travaille : $P_{poids\to S} = -Mg.(-R_s\dot{\alpha})$ et $E_c = \frac{1}{2}J_{SR}\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$ avec $\omega = \dot{\alpha}$ et $V = R_s\omega$

D'où $\frac{dE_c}{dt} = J_{SR}\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + MR_s^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$, l'expression du TEC devient :

$$J_{SR}\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + MR_s^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = MgR_s\dot{\alpha}$$

Soit

$$J_{SR} = \frac{M(g.R_s - \ddot{\alpha}.R_s)}{\ddot{\alpha}}$$

<u>Il reste à déterminer $\ddot{\alpha}$ à partir de l'expérience.</u>

D'après l'expression précédente : $\ddot{\alpha} = \frac{MgR_s}{(J_{SR} + MR_s^2)}$, or $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t$ et $\alpha = \frac{\ddot{\alpha}t^2}{2}$. On en déduit $t = \sqrt{\frac{2\alpha}{\ddot{\alpha}}}$. En remplaçant il vient $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha}{\ddot{\alpha}}}$. On sait que $h = R_s\alpha$ soit $\alpha = \frac{h}{R_s}$. En remplaçant de nouveau et en élevant au carré il vient : $\dot{\alpha}^2 = \frac{\ddot{\alpha}^2 2h}{\ddot{\alpha}R_s} = \frac{\ddot{\alpha}2h}{R_s} = \frac{MgR_s}{(J_{SR} + MR_s^2)}\frac{2h}{R_s} \Leftrightarrow J_{SR} = \frac{M(2gh - R_S^2\dot{\alpha}^2)}{\dot{\alpha}^2}$

<u>Application numérique</u> : 1 tour en 0,3s => $\dot{\alpha} = 20{,}9 rad/s$

$$J_{SR} = 4{,}18.10^{-5} kg.m^2$$

Q.4. En déduire le moment d'inertie de la roue $\boldsymbol{J_R}$.

$$J_R = J_{SR} - J_S = 3{,}14.10^{-5} kg.m^2$$

Q.5. En appliquant le PFD trouver l'expression du moment d'inertie du support :

$J_S = \frac{M(g.R_s - \ddot{\alpha}.R_s)}{\ddot{\alpha}}$ avec $\ddot{\alpha}$ l'accélération du support

- Le théorème de la résultant dynamique appliqué au système $\{fil, masse\}$:

  $$M\Gamma_M = T_{fil\to M} - Mg$$

  Soit $T_{fil\to M} = M(\Gamma_M + g)$ avec $\Gamma_M = -R_s\dot{\omega}_S = -R_s\ddot{\alpha}$ car $T_{fil\to M} > 0$
- Le théorème du moment dynamique sur le support en O suivant $\vec{z}$ donne :

$$\overrightarrow{\delta_{O,S/0}}.\vec{z} = \sum \overrightarrow{M_{O,ext\to S}}.\vec{z}$$

Or $\overrightarrow{\delta_{O,S/0}}.\vec{z} = J_s\ddot{\alpha}$ et $\sum \overrightarrow{M_{O,ext\to S}}.\vec{z} = T_{fil}R_s$, d'où :

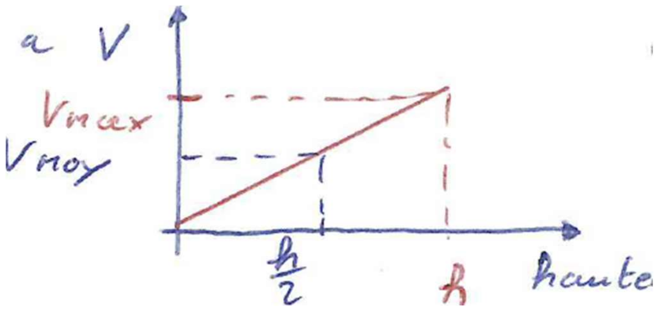
$$J_s\ddot{\alpha} = M(-R_s\ddot{\alpha} + g)R_s$$
$$J_s = \frac{M(gR_s - \ddot{\alpha}R_s^2)}{\ddot{\alpha}}.$$

Q.6. **À partir de cette expression et de la valeur de la vitesse de rotation mesurée, retrouver la valeur du moment d'inertie du support obtenue à la question 2.**

On sait que le mouvement est uniformément accéléré ainsi :

$$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}.t \text{ et } \dot{\alpha}(0) = 0$$

On a



Le temps est $t = \frac{h}{V_{moy}}$ et $V_{moy} = \frac{V_{max}}{2} = \frac{\dot{\alpha}R_s}{2}$

D'où $t = \frac{2h}{\dot{\alpha}R_s}$ et $\ddot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}^2 R_s}{2h}$.

$$\text{Enfin : } J_s = \frac{M(2gh - R_s^2\dot{\alpha}^2)}{\dot{\alpha}^2}.$$

Détermination des caractéristiques d'un banc dynamique

2. Détermination de l'inertie équivalente : $\boldsymbol{J_{EquV}}$

On considère, pour la question suivante, que les moments des roues avant et arrière et leur masse sont identiques et $J_R = 3{,}14.10^{-5} kg.m^2$, on a $M_V = M_C + 4.M_R$ avec M_C la masse du châssis.

Q.1. **Calculer l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre de rotation des roues de l'ensemble $\{\boldsymbol{Chassis}, \boldsymbol{Roues}\}$ qui correspond à la voiture complète avec $\boldsymbol{M_V = 873g}$.**

D'après la définition $E_c = \frac{1}{2}M\overrightarrow{V_{G,S/R_g}}.\overrightarrow{V_{A,S/R_g}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R_g}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

- Pour les roues $A = G_R$ avec G_R le centre d'inertie des roues

$$E_{c(roues)} = \frac{1}{2}4M_R\overrightarrow{V_{G_R,R/R_g}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{G_R,R/R_g}}.\overrightarrow{\Omega_{R/R_g}}$$

$$E_{c(roues)} = \frac{1}{2}\left(4M_R\overrightarrow{V_{G_R,R/R_g}}^2 + 4J_R{\omega_R}^2\right)$$

- Pour le châssis $\overrightarrow{\Omega_{châssis/R_g}} = \vec{0}$

$$E_{c(chassis)} = \frac{1}{2}M_C\overrightarrow{V_{G_C,C/R_g}}^2 \text{ où } M_V = M_C + 4M_R$$

- D'où pour la voiture :

$$E_{c(voiture)} = \frac{1}{2}M_C\overrightarrow{V_{G_C,C/R_g}}^2 + \frac{1}{2}\left(4M_R\overrightarrow{V_{G_R,R/R_g}}^2 + 4J_R\omega_R^2\right)$$
$$E_{c(voiture)} = \frac{1}{2}M_V\overrightarrow{V_{G,S/R_g}}^2 + \frac{1}{2}4J_R\omega_R^2$$

Or $V_{G,S/R_g} = \omega_R R_R$ d'où $E_{c(voiture)} = \frac{1}{2}\omega_R^2(M_V R_R^2 + 4J_R)$
On en déduit $J_{EquV} = M_V R_R^2 + 4J_R = 1{,}05.10^{-3} kg.m^2$
Remarque : La rotation des roues ajoute de l'inertie par rapport au châssis qui n'est qu'en translation ($\approx +14\%$), il est donc important d'avoir des pièces en rotation les plus légères possibles car cela permet de gagner sur l'inertie de translation et de rotation. Un kilogramme sur les pièces en rotation a plus d'impact qu'en kilogramme sur le châssis.

3. Détermination des dimensions des rouleaux du banc d'inertie

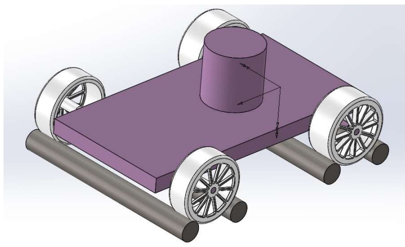
On souhaite réaliser un banc de simulation du comportement dynamique de la voiture grâce à 4 cylindres de longueur $L_C = 200mm$ qui correspond à la voie de la voiture (Cf premier schéma). Ce banc permettra de tester la voiture dans les phases d'accélération et de décélération.

Le principe d'un banc à rouleaux est de simuler l'inertie de la voiture par l'inertie des rouleaux mis en mouvement par le RSG des roues sur les rouleaux.

La voiture possédant 4 roues motrices, les roues avant seront posées sur deux cylindres et les roues arrière sur les deux autres.

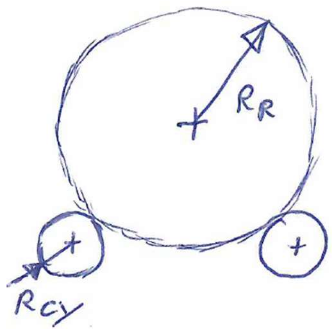
L'intérêt d'un tel banc est de pouvoir étudier le comportement dynamique d'un véhicule sans être sur une route, cela permet entre autres de déterminer la puissance aux roues et de pouvoir améliorer cette puissance par différents réglages du moteur. L'avantage est aussi que les conditions sont toujours les mêmes, on peut donc facilement faire des comparaisons des résultats obtenus.

Ces bancs sont utilisés par tous les constructeurs automobiles et par les préparateurs et les écuries de compétitions. Ci-dessous des photos de bancs réels et de ce à quoi pourrait ressembler le banc pour notre voiture de modélisme.



Il est nécessaire de dimensionner les rouleaux afin qu'ils s'approchent en fonctionnement de l'inertie d'un véhicule, autrement dit, l'inertie équivalente des rouleaux doit être proche de l'inertie équivalente de la voiture.

Q.2. **À partir des résultats de l'étude précédente, déterminer par une étude énergétique le rayon R_C des cylindres qui permettront de simuler au mieux le comportement dynamique de la voiture de modélisme. Réaliser le calcul pour des cylindres en PLA ($densit$é $\approx 1,2$) et en acier ($densit$é $\approx 7,8$).**



Les 4 roues motrices vont entrainer 4 cylindres en rotation.

On veut que l'inertie des cylindres corresponde à l'inertie en translation du véhicule donc :

$$\frac{1}{2}M_V\omega_R^2R_R^2 = \frac{1}{2}4J_{cy}\omega_{cy}^2$$

Or $\frac{\omega_R}{\omega_{cy}} = -\frac{R_c}{R_R}$ soit $\omega_R = -\frac{R_c}{R_R}\omega_{cy}$ d'où :

$$\frac{1}{2}\left(M_V R_R^2\frac{R_c^2}{R_R^2}\right)\omega_{cy}^2 = \frac{1}{2}4J_{cy}\omega_{cy}^2$$

Il faut donc $M_V R_c^2 = 4J_{cy}$. D'après l'inertie d'un cylindre : $M_V R_c^2 = \frac{4M_{cy}R_C^2}{2}$ d'où $M_V = 2M_{cy} = 2\rho R_C^2\pi L_C$:

$R_C = \sqrt{\frac{M_V}{2\rho\pi L_C}}$, on prend $L_C = 0{,}2m \approx l$ la longueur entre les roues gauches et droites.

Pour du PLA : $R_{C_{PLA}} = 24mm$; pour de l'acier $R_{C_{Acier}} = 9{,}5mm$ (attention $\rho = densité.10^3$).

La modélisation sur SolidWorks du banc avec les 4 roues et les 4 cylindres créée un système hyperstatique, donc compliqué à mettre en place. Afin de simplifier l'étude, il a été décidé de simuler une seule roue entrainant un seul cylindre. Dans ces conditions :

Q.3. **Quel devra être le couple mécanique appliqué à la roue seule ?**

Sur la simulation, le couple appliqué à la roue doit être égal à 4 fois le couple appliqué à chaque roue.

Q.4. **Dans le cas d'un cylindre en acier, quelles dimensions devra-t-il posséder afin qu'il se comporte dynamiquement comme les quatre ? Deux solutions possibles.**

1ère solution : l'inertie est multipliée par 4.

$R_C = 9{,}5.10^{-3}m$ et $L_{C1} = 4L_C = 0{,}8m$

2ème solution : On repart de l'équation des questions précédentes : $R_C = \sqrt{\frac{M_V}{2\rho\pi L_C}}$

$$R_{C1} = \sqrt{\frac{4M_V}{2\rho\pi L_C}}$$

$R_C = 19.10^{-3}m$ et $L_{C1} = 0{,}2m$