

Exercice 1

Deux voitures se suivent en roulant à 30 m/s et à 60 m l'une de l'autre. La première commence à freiner avec une accélération de 3 m.s⁻² et la seconde débute son freinage 2 s plus tard avec une accélération de 2 m.s⁻². Les deux voitures entrent-elles en collision ? Si oui, avec quelle différence de vitesse ? Si non, à quelle distance sont-elles une fois complètement arrêtées ?

situation initiale

$$v_1 = v_2 = v_0 = 30 \text{ m/s}$$

$$d = 60 \text{ m}$$

pendant cette première phase, seule la voiture 1 freine

2 s

situation après 2 s

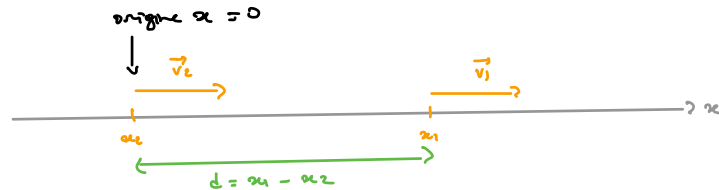
$$v_1 = v_0' = 24 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_0 = 30 \text{ m/s}$$

$$d = 54 \text{ m}$$

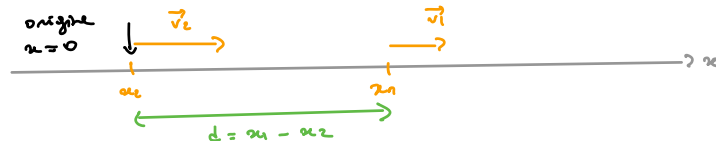
pendant cette seconde phase, les deux voitures freinent

collision ?



$$x_2 = v_0 \cdot t \Rightarrow \text{pour } t = 2 \text{ s, } x_2 = 60 \text{ m (et } v_2 = 30 \text{ m/s)}$$

$$\begin{cases} x_1 = d + v_0' t - a_1 t^2 / 2 \\ v_1 = v_0 - a_1 t \end{cases} \Rightarrow \text{pour } t = 2 \text{ s, } v_1 = 24 \text{ m/s et } x_1 = 114 \text{ m}$$



pour les expressions qui suivent, on a modifié les origines du temps et de l'axe (ou) : on commence cette seconde phase à $t = 0$ et $x_2 = 0$

$$\begin{cases} v_2 = v_0 - a_2 t = 30 - 2t \\ x_2 = v_0 t - a_2 / 2 t^2 = 30t - t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = v_0' - a_1 t = 24 - 3t \\ x_1 = d + v_0' t - a_1 / 2 t^2 = 54 + 24t - 1.5t^2 \end{cases}$$

Remarquons que la voiture 2, si elle n'entre pas en collision avec la voiture 1 avant, s'arrête au bout de 15 s donc si la collision n'a pas lieu avant cette date elle n'aura jamais lieu.

De même, la voiture 1 s'arrête après 8 s si elle n'est pas percutée avant, et pour $t > 8$ s les équations écrites ne sont plus valables.

Il y a collision si $x_2 = x_1$, soit

$$30t - t^2 = 54 + 24t - 1.5t^2, \text{ soit}$$

$$0.5t^2 + 6t - 54 = 0$$

$$\Delta = 36 + 108 = 144 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 12 \text{ et } t = \frac{-6 \pm 12}{2 \times 0.5}$$

soit $t = 6 \text{ s}$ (la solution négative n'a aucun sens)

Donc il y a collision au bout de 12 s, avec

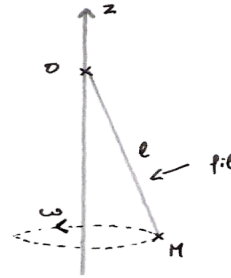
$v_1 = 6 \text{ m/s}$ et $v_2 = 18 \text{ m/s}$, donc une Δ de 12 m/s

Exercice 2

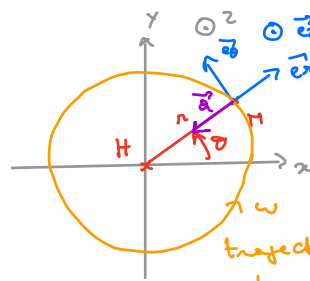
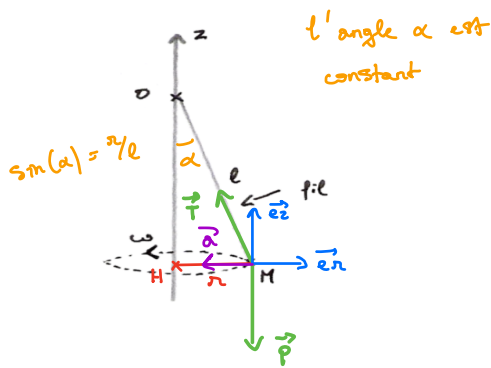
Une bille de masse m est suspendue à un fil de longueur l , inextensible et de masse négligeable. L'extrémité supérieure du fil est fixée en un point O , fixe dans un repère (R) galiléen.

Une bille de masse m , assimilable à un point matériel, est suspendue au fil et tourne dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire ω_0 constante.

Déterminer, en fonction de g , l et ω_0 , l'angle que fait le fil avec la verticale.



Il est utile dans cet exercice de représenter la situation selon deux points de vue différents :



mth circulaire uniforme : $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$

2^o loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow$ projection / $\vec{e}_r$: $-mr\omega^2 = -T \sin(\alpha)$
 projection / $\vec{e}_z$: $0 = -mg + T \cos(\alpha)$

On obtient donc $\frac{r\omega^2}{g} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ Or, $r = l \sin(\alpha)$

$$\text{donc } \frac{l \sin(\alpha) \omega^2}{g} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{g}{l\omega^2}$$

Variante : dans le référentiel non galiléen qui tourne autour de (Oz) à

la vitesse angulaire ω (dans lequel m est immobile), on a :

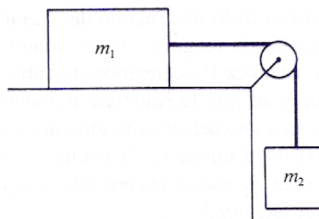
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{f}_{ic} = m\omega^2 r \vec{e}_r$$

et on conclut de la même manière ...

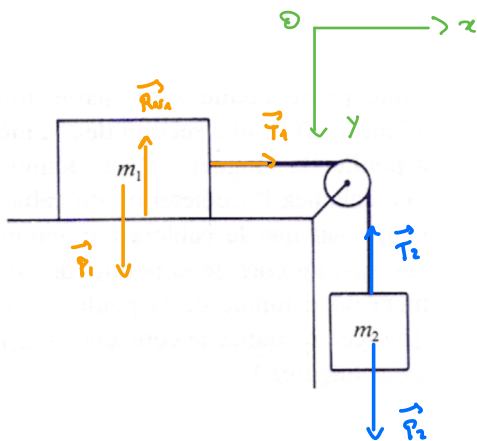
Exercice 3

On considère le dispositif représenté ci contre, on néglige tous les frottements ainsi que l'inertie de la poulie. $m_1 = 12 \text{ kg}$ et $m_2 = 4 \text{ kg}$.

1. Calculer l'accélération de la masse m_1
2. Si m_1 est initialement immobile et à 250 cm du bord de la table, en combien de temps y arrivera-t-elle ?



1 -



Les frottements et l'inertie de la poulie étant négligés, $T_1 = T_2$ (mais $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$: la direction n'est pas la même !)

Le fil étant inextensible, $a_1 = a_2 (= a)$, mais là encore $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$.

2° loi de Newton pour m_1 :

$$m_1 \vec{a}_1 = \underbrace{\vec{P}_1 + \vec{R}_{1a}}_{=\vec{0}} + \vec{T}_1$$

donc, en projetant sur (Ox) : $m_1 a = T_1$ (1)

2° loi de Newton pour m_2 :

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$$

en projetant sur (Oy) : $m_2 a = p_2 - T_2$

$$\text{soit } m_2 a = m_2 g - T_2 \quad (2)$$

On somme (1) et (2): $m_1 a + m_2 a = \cancel{T_1} + m_2 g - \cancel{T_2}$

d'où $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

interprétation intuitive:

le poids de m_2 ($= m_2 g$)

entraîne l'ensemble $m_1 + m_2$

$$2. \quad a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

donc $v_1 = a t$

$$\text{et } x_1 = -d + \frac{a t^2}{2}$$

(avec $d = 250 \text{ cm}$)

m_1 arrive donc au bord de la table ($x_1 = 0$) pour

$$-d + \frac{a t^2}{2} = 0$$

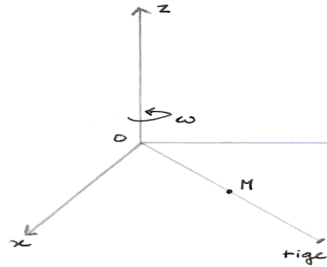
$$\text{soit } t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

A.N: $a = 2.5 \text{ m.s}^{-2}$

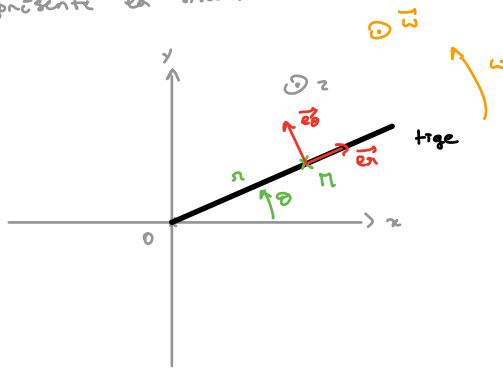
$t = 1.41 \text{ s}$

Exercice 4

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m, percée d'un trou, est astreinte à se déplacer le long d'une tige rectiligne de longueur L. Ce contact se fait sans frottements, c'est à dire que la réaction de la tige sur la bille est toujours orthogonale à la tige. La tige, dont une extrémité est fixée au point O du repère (Oxyz), référentiel terrestre local considéré ici comme Galiléen, tourne dans ce repère à vitesse angulaire ω constante dans le plan (xOy). La bille se trouve initialement à une distance d de O, sans mouvement par rapport à la tige.



On représente la situation vue de dessus :



bilan des forces : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

$$\vec{R}_W = R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z$$

tout ce que l'on sait sur la réaction est qu'elle n'a pas de composante sur $\vec{e}_r$ (pas de frottements) donc orthogonale à la tige
 $\Rightarrow$ composantes sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ —

1. On utilise la 2^e loi de Newton dans le référentiel (R) = (Oxyz), galiléen -

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_W, \text{ avec } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \ddot{\theta} \text{ est nul puisque la tige est astreinte à rester sur la tige, qui tourne à vitesse angulaire constante, donc } \dot{\theta} = \omega = \text{cte}$$

$$\text{projection / } \vec{e}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{projection / } \vec{e}_\theta : m \cdot 2\dot{r}\dot{\theta} = R_\theta \quad (2)$$

$$\text{projection / } \vec{e}_z : 0 = -mg + R_z \quad (3)$$

On exploite (1) pour déterminer l'évolution de $r = ON$:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad \text{donc } r = d e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t} \quad \triangle !$$

$$\text{et les c.I donnent } \begin{cases} r(t=0) = d \\ \dot{r}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} d + \mu = d \\ \omega(d - \mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \mu = d/2 \quad \text{et donc } r = \frac{d}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$\text{soit } r = d \cosh(\omega t)$$

ce n'est pas une solution en cosinus, ce serait le cas pour $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$

2. On calcule la réaction en utilisant les projections (2) et (3):

(2) donne $R_\theta = 2m\dot{\theta}$, mais $\dot{\theta} = \omega$ et $\dot{r} = \omega d \sinh(\omega t)$

d'où $R_\theta = 2m\omega^2 d \sinh(\omega t)$

(3) donne $R_z = mg$

Variante: Dans le référentiel (R') non galiléen qui tourne avec la tige (dans lequel la tige est immobile), le mouvement de M se fait seulement le long de la tige: $\vec{v}(M/R') = \dot{r} \vec{e}_r$ et $\vec{a}(M/R') = \ddot{r} \vec{e}_r$

On doit ajouter les forces d'inertie d'entraînement (centrifuge) et de Coriolis: $\vec{f}_{ic} = m\omega^2 r \vec{e}_r$ et $\vec{f}_{cf} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/R')$
 $= -2m(\omega \vec{e}_z) \wedge (\dot{r} \vec{e}_r)$
 $= -2m\omega \dot{r} \vec{e}_\theta$

La 2^e loi de Newton dans (R') donne:

$$m\vec{a}(M/R') = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ic} + \vec{f}_{cf}$$

d'où les projections:

sur $\vec{e}_r$: $m\ddot{r} = 0 + 0 + m\omega^2 r + 0$

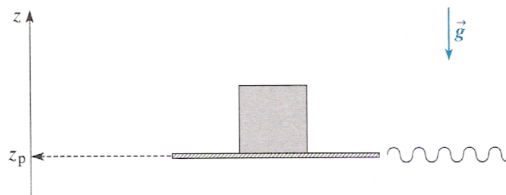
sur $\vec{e}_\theta$: $0 = 0 + R_\theta + 0 - 2m\omega \dot{r}$

sur $\vec{e}_z$: $0 = -mg + R_z$

On retrouve bien les résultats obtenus dans (R)

Exercice 5

Un plateau horizontal est animé d'un mouvement vertical caractérisé par $z(t) = a \cos(\omega t)$. Un objet, que l'on assimile à un point matériel de masse m est posé sur ce plateau. Déterminer la condition sur la fréquence du mouvement du plateau pour que l'objet ne quitte jamais le plateau (pour qu'ils soient toujours en contact).

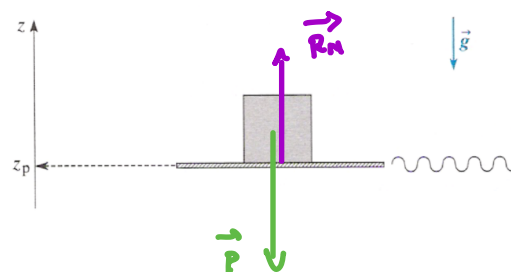


On raisonne en considérant que l'objet reste en contact avec le plateau et on cherche à caractériser le cas limite où il décolle.

Alors l'accélération de l'objet est la même que celle du plateau, donc

$$\vec{a} = \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z = -a \omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

↳ attention, ce a est une distance, pas l'accélération !



La 2^e loi de Newton donne $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n$

donc projeté sur $\vec{e}_z$: $-m a \omega^2 \cos(\omega t) = -mg + R_n$

Soit $R_n = m(g - a \omega^2 \cos(\omega t))$

Tant que l'objet reste en contact, $R_n \geq 0$, donc $a \omega^2 \cos(\omega t) \leq g$

On veut une condition sur ω pour que l'objet ne quitte jamais le contact,

donc $a \omega^2 \cos(\omega t) \leq g$ quel que soit t , ce qui implique $a \omega^2 \leq g$

(l'extremité "critique" est le sommet du mouvement).

La réponse est donc $\omega \leq \omega_{\text{lim}}$ avec $\omega_{\text{lim}} = \sqrt{g/a}$

Variante : Dans le référentiel non galiléen qui se déplace avec le plateau,

l'objet est immobile tant qu'il reste en contact.

$$\begin{aligned} \text{La force d'inertie est } \vec{f}_{ic} &= -m \vec{a} \text{ (plateau / référentiel)} \\ &= -m (-a \omega^2 \cos(\omega t)) \vec{e}_z \\ &= m a \omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

L'objet décolle lorsque $\vec{f}_{ic}$ est vers le haut et est supérieure au poids, donc ne décolle pas tant que $f_{ic} \leq p$, soit $m a \omega^2 \cos(\omega t) \leq mg$ et on conclut comme précédemment...

Exercice 6

On considère un oscillateur harmonique non amorti, donc caractérisé par les grandeurs k et m , mais qui oscille verticalement. On note g l'accélération de la pesanteur et l_0 la longueur à vide du ressort.

- Déterminer la position d'équilibre de la masse m (assimilée à un point matériel M).
- On décale l'origine sur l'axe (Ox) de manière à avoir $x=0$ au niveau de la position d'équilibre. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le mouvement de M .
- A $t=0$, $x=0$ (position d'équilibre) et $v_x = v_0$. Déterminer $x(t)$.
- Justifier le fait que $E_m = c^{ste}$. Quels termes doit-on inclure dans E_m ?
- Déterminer E_p en prenant $E_p = 0$ à la position d'équilibre.
- En déduire E_m et vérifier ainsi qu'elle est constante.

1. $\vec{p} = m\vec{g}$ et $\vec{f}_h = -k(l-l_0)\vec{e}_x$

À l'équilibre $\vec{p} + \vec{f}_h = \vec{0}$, donc en projetant :

$$mg - k(l-l_0) = 0 \Rightarrow l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

2. Avec cette origine pour O , $l = l_{eq} + x$
 $= l_0 + \frac{mg}{k} + x$

et donc $\vec{f}_h = -k(l-l_0)\vec{e}_x$
 $= -k(x + \frac{mg}{k})\vec{e}_x$

La 2^e loi de Newton donne : $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{f}_h$ ($\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$)

en projetant : $m\ddot{x} = mg - k(x + \frac{mg}{k}) = -kx$

soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

3. Solution $x = X_m \cos(\omega_0 t + \phi)$ et c.t. $\begin{cases} X_m \cos(\phi) = 0 \\ -\omega_0 X_m \sin(\phi) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = -\pi/2 \\ X_m = v_0/\omega_0 \end{cases}$

donc $x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

4. bilan des forces : $\begin{cases} \vec{f}_h \text{ conservative, } e_p = \frac{1}{2} k(l-l_0)^2 + c^{ste} \\ \vec{p} \text{ conservative, } e_p = -mgx + c^{ste} \end{cases} \Rightarrow e_m = c^{ste}$
 avec $e_m = e_c + e_p + e_{pp}$

5. $e_p = e_{pc} + e_{pp} = \frac{1}{2} k(l-l_0)^2 - mgx + c^{ste}$

Or, $l-l_0 = l_0 + \frac{mg}{k} + x - l_0 = \frac{mg}{k} + x \Rightarrow (l-l_0)^2 = (\frac{mg}{k})^2 + \frac{2mgx}{k} + x^2$

d'où $e_p = \frac{1}{2} k(\frac{mg}{k})^2 + \frac{2mgx}{k} + \frac{1}{2} kx^2 - mgx + c^{ste} = \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k} + \frac{1}{2} kx^2 - mgx + c^{ste}$

$= \frac{1}{2} kx^2 + \frac{m^2 g^2}{2k} + c^{ste}$

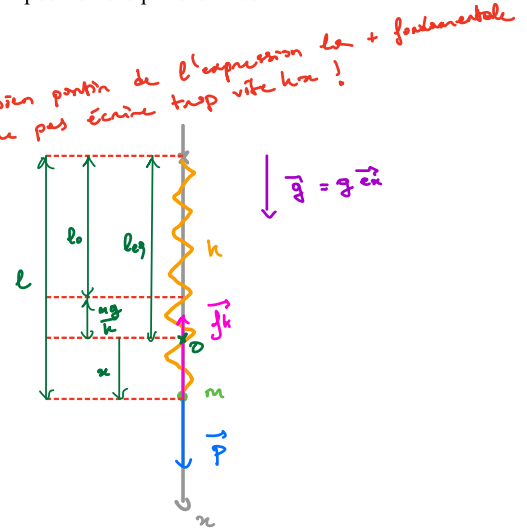
et on veut $e_p = 0$ pour $x = 0$, donc $\frac{m^2 g^2}{2k} + c^{ste} = 0$ et alors $e_p = \frac{1}{2} kx^2$

6. $e_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t)$ et $e_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t)$

Or, $k = m \omega_0^2$ donc $e_m = e_p + e_c = \frac{1}{2} k X_m^2 (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2} k X_m^2$

= 1

donc e_m est bien constante --



on peut aussi prendre $\phi = \pi/2$, mais alors $X_m = -v_0/\omega_0$ et on veut $X_m > 0$.

on laisse c^{ste} à priori, on va ensuite faire un choix "global" pour la constante, pour les deux ep.

cette ressemblance à une simple ep électrique, mais en fait elle contient ep de pesanteur!

Exercice 7

On abandonne sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse alors sans frottements sur une distance L avant de rencontrer un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. Déterminer la longueur maximale dont sera comprimé le ressort

A est la position initiale

B est la position où le cube rentre en contact avec le ressort

C est la position où le cube est comprimé au maximum

$\Delta l_{\max}$, distance entre B et C, correspond à la compression maximale du ressort

Les forces qui s'exercent sont le poids (force conservatrice, $e_{pp} = mgz$) ; la réaction normale (ne travaille pas) et - à partir de B - le rappel élastique (force conservatrice, $e_{pe} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$) : l'énergie mécanique est conservée.

On exploite $e_{ma} = e_{mc}$: $e_{ca} + e_{ppa} + e_{pea} = e_{cc} + e_{ppc} + e_{pec}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 : vitesse nulle en A mgz_A 0 : pos en contact avec le ressort mgz_B $\frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2$
 (il est donc à sa longueur à vide)
 0 : vitesse nulle en C en compression max (longueur minimum $\Rightarrow$ vitesse nulle)

On en déduit que $mgz_A = mgz_B + \frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2$

Or, $\sin(\alpha) = \frac{z_A - z_B}{L + \Delta l_{\max}}$ donc $mg \sin(\alpha) (L + \Delta l_{\max}) = \frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2$

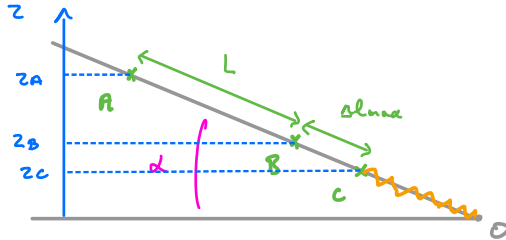
On note $x = \Delta l_{\max}$ (pour simplifier les notations ...), donc on vérifie :

$$mg \sin \alpha L + mg \sin \alpha x = \frac{1}{2} k x^2, \text{ soit } x^2 - \frac{2mg \sin \alpha}{k} x - \frac{2mg \sin \alpha}{k} L = 0$$

ou encore $x^2 - \alpha x - \alpha L = 0$ avec $\alpha = \frac{2mg \sin \alpha}{k}$

Solutions : $x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha L}$ on garde la solution positive ...

Enfinement, $\Delta l_{\max} = \frac{mg \sin \alpha}{k} + \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k} \left(\frac{mg \sin \alpha}{k} + 2L \right)}$



Exercice 8

On s'intéresse aux oscillations d'une molécule HCl, dans l'approximation d'oscillations harmoniques. L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est donnée par :

$E_p(r) = C \cdot r^{-n} - \alpha e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$, où C , n , et α sont des constantes positives. Les valeurs, déterminées expérimentalement, sont : $C = 1,06 \cdot 10^{-138}$ SI ; $\alpha = 0,4$ et $n = 12$.

1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable et calculer la valeur de r correspondante.
2. Montrer que, dans l'approximation d'oscillations harmoniques, les forces associées à l'énergie potentielle donnée ci-dessus sont équivalentes à une force de rappel élastique et calculer la « constante de raideur ».
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par r lors des oscillations harmoniques (on considérera que l'atome de Chlore est immobile).
4. En déduire la période propre de ces oscillations.

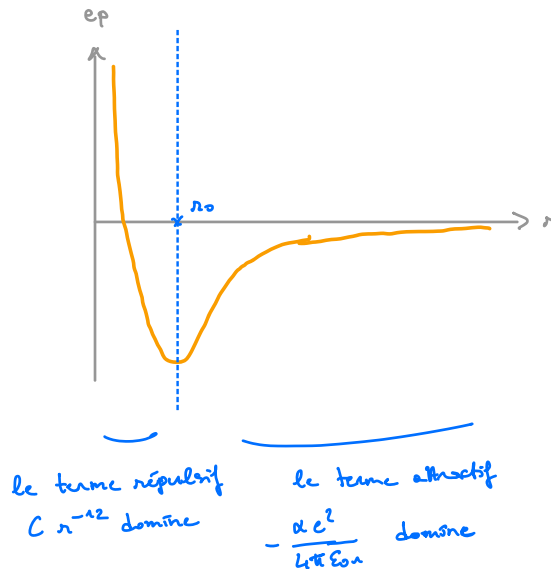
$$1. \quad e_p = C r^{-n} - \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

une position d'équilibre vérifie

$\frac{de_p}{dr} = 0$, ce qui donne :

$$-n C r^{-n-1} + \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$\text{Soit } r_0 = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 n C}{\alpha e^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$



A.N : $r_0 = 1,27 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$\hookrightarrow$ c'est un ordre de grandeur cohérent, puisque cela représente une longueur de liaison -

cette position d'équilibre est stable $\Rightarrow \frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0) > 0$.

$$\text{On a } \frac{d^2 e_p}{dr^2} = n(n+1) C r^{-n-2} - \frac{2 \alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

A.N : $\frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0) = 4,92 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ c'est bien positif $\Rightarrow$ eq. stable

2. On a vu que l'on pourrait faire un DL à l'ordre 2 autour de r_0 :

$$e_p(r) = e_p(r_0) + \underbrace{\frac{de_p}{dr}(r_0)}_{=0} (r-r_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0)}_{>0} (r-r_0)^2$$

donc $e_p(r) = c^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k (r-r_0)^2$ avec $k = \frac{1}{2} \frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0) \Rightarrow$ force en $k(r-r_0)$ donc rappel élastique

$$3. \quad e_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + c^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k (r-r_0)^2$$

$$e_m = c^{\frac{1}{2}} \text{ donc } \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \dot{r} \ddot{r} + \frac{1}{2} k \cdot 2 (r-r_0) \dot{r} = 0 \Rightarrow m \ddot{r} + k r = k r_0$$

4. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, l'eq. diff devient $\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

A.N : $T = 1,16 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

Exercice 9

Une météorite arrive au voisinage de la terre avec une vitesse « à l'infini » v_0 et un paramètre d'impact b . Le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen, et on néglige le frottements avec l'atmosphère (la météorite passe suffisamment loin de la terre...).

On prendra numériquement :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} ; m = 10^5 \text{ kg} ; M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; v_0 = 10^4 \text{ m/s et } b = 10^7 \text{ m.}$$

1. Quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Calculer la distance minimale entre la météorite et le centre de la terre.

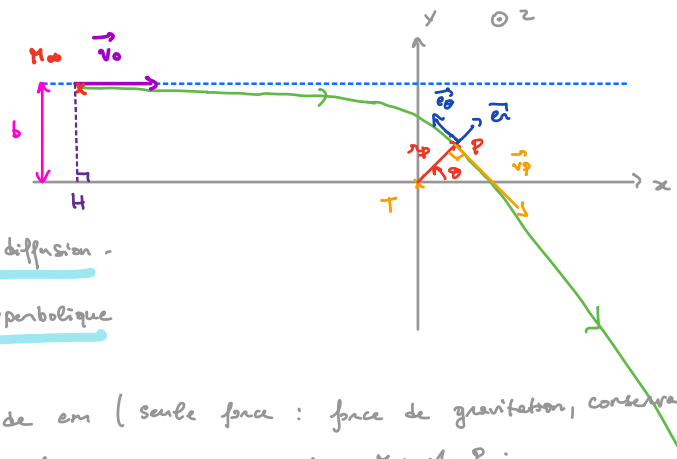
$$1. \quad e_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r}$$

dans la situation initiale,

$$v = v_0 \text{ et } r \rightarrow \infty$$

$$\text{donc } e_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

donc $e_m > 0$: c'est un état de diffusion -
la trajectoire est hyperbolique



2. On exploite la conservation de e_m (seule force : force de gravitation, conservative) et celle du moment cinétique (force centrale) entre M_0 et P :

$$e_{m0} = e_{mp} \quad \text{donne} \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{G M_T m}{r_p} \quad (1)$$

Pour le moment cinétique (par rapport à T) :

$$\vec{L}_{T0} = m \vec{T M_0} \wedge \vec{v_0} \quad \text{et on décompose } \vec{T M_0} = \vec{T H} + \vec{H M_0}$$

$$\text{D'où } \vec{L}_{T0} = m (\vec{T H} + \vec{H M_0}) \wedge \vec{v_0} = m \vec{H M_0} \wedge \vec{v_0} \quad (\text{car } \vec{T H} \parallel \vec{v_0})$$

$$\text{Et donc } \vec{L}_{T0} = m (b \vec{e_2}) \wedge (v_0 \vec{e_1}) = -m b v_0 \vec{e_3}$$

$$\vec{L}_{Tp} = m \vec{T P} \wedge \vec{v_p} = m (r_p \vec{e_1}) \wedge (v_p \vec{e_3}) = -m r_p v_p \vec{e_2}$$

$$\text{Alors } \vec{L}_{T0} = \vec{L}_{Tp} \quad \text{donne : } m b v_0 = m r_p v_p \quad (2)$$

en effet : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e_1} + r \dot{\theta} \vec{e_2}$
en général, mais en P
(point de la trajectoire le + proche de T) r est
extrémum et donc $\dot{r} = 0$
 $\Rightarrow \vec{v_p} = r \dot{\theta} \vec{e_2}$

Si on note $v_p = \| \vec{v_p} \|$,

$$\text{on a } \vec{v_p} = -v_p \vec{e_2}$$

$$\text{car } \dot{\theta} < 0$$

En combinant (1) et (2) de manière à éliminer v_p , on obtient

l'équation vérifiée par r_p :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{b v_0}{r_p} \right)^2 - \frac{G M_T m}{r_p} \quad \text{soit} \quad r_p^2 v_0^2 = b^2 v_0^2 - 2 G M_T r_p$$

$$\text{soit } r_p^2 + \frac{2 G M_T}{v_0^2} r_p - b^2 = 0$$

$$\text{solution : } r_p = -\frac{G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\frac{G M_T}{v_0^2} + b^2}$$

on garde la solution
positive !

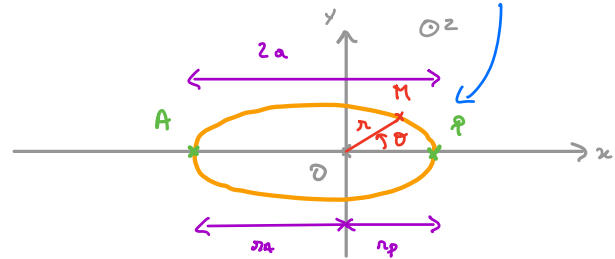
Exercice 10

La comète de Halley décrit autour du soleil une orbite elliptique avec une période $T = 76$ ans. La plus courte distance au soleil (périgée) est de 88 millions de km. La terre, elle, décrit une orbite quasi-circulaire de rayon 150 millions de km en 1 an.

Pour une orbite elliptique, les coordonnées polaires (r, θ) suivent l'équation $r = p / (1 + e \cdot \cos(\theta))$.

- 1) Calculer les valeurs du $\frac{1}{2}$ grand axe et de l'excentricité de la trajectoire elliptique de la comète.
- 2) Calculer les vitesses au périgée et à l'apogée

l'allure réelle de la trajectoire de la comète est "beaucoup plus elliptique"



1. Pour calculer le $\frac{1}{2}$ grand axe, on utilise la 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \quad \text{donc} \quad a_H = a_T \cdot \left(\frac{T_H}{T_T} \right)^{2/3}$$

pour la comète de Halley

pour la terre

$$\text{A.N. : } a_H = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{76}{1} \right)^{2/3} = 2,69 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

comme c'est un rapport, on peut laisser les périodes en années !

Pour calculer l'excentricité, on reprend l'équation polaire de la trajectoire : $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$

Au point P, $\theta = 0$, et donc $r_P = \frac{p}{1+e}$ $r_P = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ m}$

Au point A, $\theta = \pi$, et donc $r_A = \frac{p}{1-e}$

en g^l, c'est $\cos(0-\pi)$, ici on a choisi $\theta_0 = 0$

on voit facilement que $r_P + r_A = 2a$, ce qui donne $\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = 2a$,

$$\text{soit} \quad \frac{p(1-e) + p(1+e)}{(1+e)(1-e)} = 2a \Rightarrow \frac{2p}{(1+e)(1-e)} = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{(1+e)(1-e)}}$$

On combine cette relation avec $r_P = \frac{p}{1+e}$: $a = \frac{r_P}{1-e}$, donc $e = 1 - \frac{r_P}{a}$

$$\text{A.N. : } e = 0,967$$

2. On utilise $e_m = \frac{h}{2a} = -\frac{GM_S}{2a}$

et comme $e_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_S m}{r}$, $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_S m}{r} = -\frac{GM_S m}{2a}$

$$\text{donc} \quad v = \sqrt{GM_S \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

A.N. : on peut déduire GM_S de $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$: $GM_S \approx 1,3 \cdot 10^{20} \text{ S}^2$

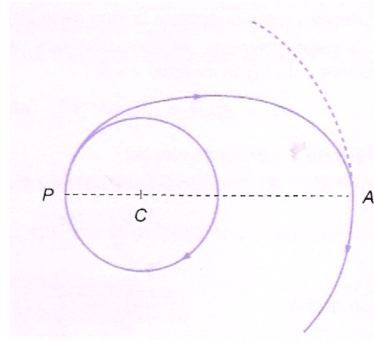
on peut calculer r_A par $r_A = 2a - r_P$: $r_A = 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m}$

$$v_P = 55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_A = 310 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Rem : La valeur de v_A est délicate, car $\frac{2}{r_A}$ et $\frac{1}{a}$ sont très proches : c'est très sensible aux arrondis. Ayant déjà v_P , on peut plutôt faire $r_A v_A = r_P v_P$, conséquence de la conservation du moment cinétique (en P et A, r est extrême, donc $\dot{r} = 0$, donc $\vec{v} \perp \vec{or}$)

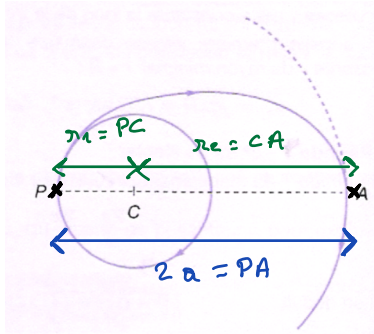
Exercice 11

On souhaite transférer un satellite d'une orbite circulaire de rayon $r_1 = 10000 \text{ km}$ à une autre orbite circulaire de rayon $r_2 = 15000 \text{ km}$. Pour cela, en un point P de l'orbite inférieure, on lui communique (par l'intermédiaire des fusées du satellite) une vitesse supplémentaire colinéaire à la vitesse déjà existante. La trajectoire est alors elliptique (le point P est le périégée de l'ellipse), jusqu'à un point A (apogée de l'ellipse, donc une $\frac{1}{2}$ ellipse « plus tard » ...) où l'on communique à nouveau une vitesse supplémentaire au satellite, lui faisant retrouver une orbite circulaire.



- 1) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique montrer que, au cours du mouvement elliptique : $v^2 = (K/m) (1/a - 2/r)$.
- 2) Déterminer les vitesses en P juste avant et juste après l'apport de vitesse
- 3) Même question au point A.
- 4) Commenter les variations d'énergie mécanique au cours de cette opération.
- 5) Combien de temps dure le transfert ?

1.



$$2a = r_1 + r_2$$

$$a = 12500 \text{ km}$$

$$= 1,25 \cdot 10^7 \text{ m}$$

1. cf cours. On utilise $e_m = \frac{K}{2a}$ et $e_m = e_c + e_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{K}{r}$

$$\text{On a alors : } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{K}{2a} - \frac{K}{r} = \frac{K}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)$$

$$\text{et donc } v^2 = \frac{K}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)$$

$$\text{et avec } K = -G m M_T : v^2 = G M_T \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

2. Au point P : - avant l'apport de vitesse : on est sur la trajectoire circulaire, $e_m = \frac{K}{2r}$

$$\text{d'où } e_c = e_m - e_p$$

$$= \frac{K}{2r} - \frac{K}{r} = -\frac{K}{2r}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{K}{2r} = \frac{G m M_T}{2r}$$

$$\text{et donc } v^2 = \frac{G M_T}{r}$$

$$\text{A.N : } v_p = \sqrt{\frac{G M_T}{r_1}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{10^7}}$$

, 3 1

- après l'apport de vitesse: on est sur la trajectoire elliptique - on utilise l'expression trouvée au 1) : $v_p' = \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)}$

A.N. : $v_p' = 6,9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

3. Au point A :

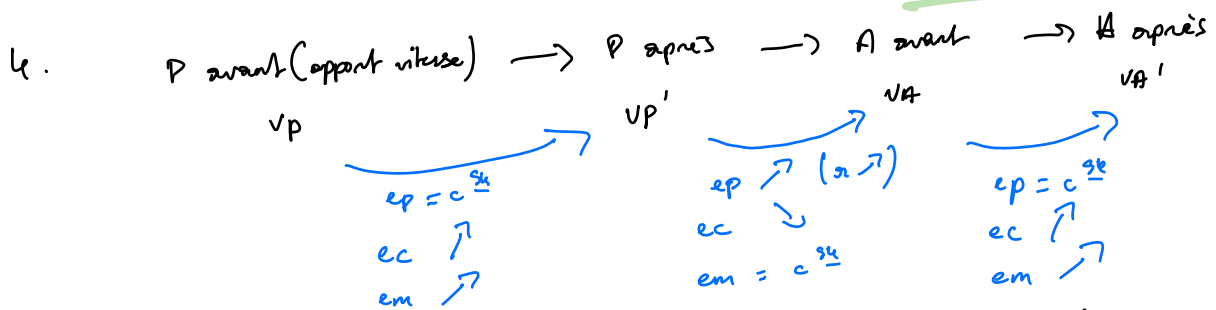
- juste avant l'apport de vitesse: trajectoire elliptique

$v_A = \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)}$ A.N. : $v_A = 4,6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

- juste après l'apport de vitesse: circulaire r_2

$v_A' = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}$

A.N. : $v_A' = 5,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$



5. 3^e loi de Kepler (on connaît a et on cherche T)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{donc} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}}$$

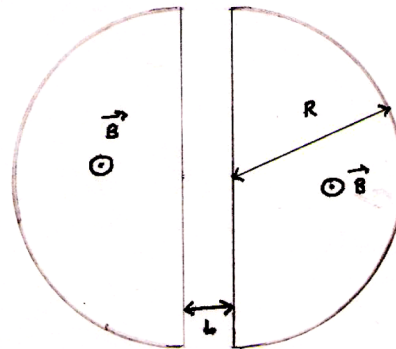
et $t_{\text{transfert}} = \frac{T}{2}$ (1/2 ellipse ...)

A.N. : $t_{\text{transfert}} \approx 6960 \text{ s}$ ($\approx 1 \text{ h } 55 \text{ min}$)

Exercice 12

Un cyclotron a pour but d'accélérer des particules chargées avec un encombrement minimal. Il est constitué de deux demi-cylindres (appelés Dees) où règne un champ $\vec{B}$ constant et uniforme. Entre les Dees, sur une largeur L très inférieure au rayon R des Dees, on applique une ddp alternative $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.

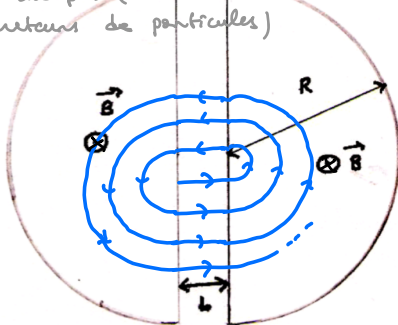
- 1) Donner une explication qualitative du fonctionnement du Cyclotron.
- 2) En admettant que le temps de passage d'un proton entre les Dees est très inférieur à la période de la ddp, quelle est l'énergie cinétique acquise à chaque passage ?
- 3) Quelle est la trajectoire d'un proton dans un Dee ? Quel temps met-il pour ce parcours ? Ce temps dépend-il de sa vitesse ? A.N.
- 4) Quelle doit-être la période de la ddp alternative ?
- 5) Quelle est la vitesse des protons maximale pour ce cyclotron ? En combien de $\frac{1}{2}$ tours sera-t-elle atteinte ?



Données : $R = 0,5 \text{ m}$; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $U_m = 100 \text{ kV}$; $B = 2 \text{ T}$.

1. Les particules chargées (protons re^+) sont accélérées par un champ $\vec{E}$ et déviées par un champ $\vec{B}$ (comme dans tous les accélérateurs de particules)

Les rayons des $\frac{1}{2}$ cercles augmentent, car la vitesse des protons augmente à chaque passage entre les Dees



Dans chaque Dee (1 Dee est un demi-cylindre dans lequel règne un champ magnétique constant et uniforme), les protons ont une trajectoire en $\frac{1}{2}$ cercle. Entre les Dees, ils sont accélérés par un champ électrique qui change périodiquement de sens, de manière à ce que les protons soient accélérés à chaque passage.

2) $\text{sec} = W(\vec{F}_e) = q(\Delta V) = e U_m$

3) $\frac{1}{2}$ cercle $t_{1/2} = T/2$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$ donc $t_{1/2} = \frac{\pi m}{eB}$

A.N : $t_{1/2} = 1,64 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ($\sim 16 \text{ ns}$) indépendant de la vitesse

4) $T_{\text{alternative}} = 2 t_{1/2} \dots$

5) La vitesse est limitée par le rayon : $R = \frac{mv}{eB}$, donc $v_{\text{max}} = \frac{eB R_{\text{max}}}{m}$

A.N : $v_{\text{max}} = 3,6 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

A chaque passage on gagne $e U_m$ d'énergie cinétique il faut donc $N = \frac{e v_{\text{max}}^2}{2 e U_m}$

A.N : $N \approx 479$ passages.

$\downarrow$
 ~ 240 tours