MP - Lycée Pothier
Année 2025-2026

Devoir maison 1 (pour le mardi 2 septembre 2025)

Consignes : le premier DS de l'année interviendra très rapidement début septembre. Le devoir de vacances ci-dessous est donc l'occasion de travailler votre rédaction pour vous y préparer. Il n'est pas interdit de chercher certaines questions à plusieurs, mais il est important que votre rédaction soit *personnelle*, afin d'avoir une correction de vos propres erreurs.

Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour pouvoir traiter les questions ultérieures.

Veuillez encadrer vos résultats.

Formules approchées d'intégrales

On fixe un segment I de $\mathbb{R}$ et une fonction w continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$. Le but de ce problème est d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)w(x)\mathrm{d}x$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

L'erreur commise par une telle approximation est définie par :

$$e(f) = \int_I f(x)w(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

On rappelle que $\mathbb{R}_m[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit que la formule approchée $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$, $e(P) = 0$. On appelle *ordre* de la formule approchée $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Q1. Montrer que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $C(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que la formule approchée $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \ \int_I x^k w(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j^k.$$

Calculs de l'ordre sur de premiers exemples

Dans cette sous-partie, on fixe $I = [0, 1]$ et pour tout $x \in I$, $w(x) = 1$.

Q3. Déterminer l'ordre de la formule approchée $I_0(f) = f(0)$. Représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.

Q4. Déterminer l'ordre de la formule approchée $I_0(f) = f(\frac{1}{2})$.

Q5. Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule approchée $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule approchée est-elle d'ordre 2 ?

Construction de formules approchées d'ordre quelconque

On revient au cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cette sous-partie, on fixe $n+1$ points distincts dans I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Q6. Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Q7. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Q8. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \ldots, x_n)$.

Q9. Montrer que la formule approchée $I_n(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) \mathrm{d}x.$$

Q10. On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule approchée $I_2(f)$ de la question **Q5.**

Évaluation de l'erreur

Dans cette sous-partie, on suppose que l'intervalle I est de la forme $[a, b]$, avec $a < b$. Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x, t) = \begin{cases} (x - t)^m & \text{si } x \geqslant t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe et on admet que φ_m est continue si $m \geqslant 1$ et discontinue si $m = 0$.

On considère une formule approchée de la forme $I_n(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ et on note $m \in \mathbb{N}$ son ordre. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

Q11. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où R_m est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) f^{(m+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

Q12. En déduire que, si $m \geqslant 1$,

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) \mathrm{d}t,$$

où la fonction $K_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x, t)) = \int_a^b \varphi_m(x, t) w(x) \mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j, t).$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

Méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que I est un segment et $\forall x \in I,\ w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0, 1]$ et on considère la formule approchée

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2}.$$

Q13. Déterminer l'ordre de la formule approchée $I_1(g)$.

Q14. Calculer la fonction $t \mapsto K_1(t)$ associée à cette formule et montrer que, pour tout fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur :

$$|e(g)| \leqslant \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a, b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n + 1$ points $a_0, \dots, a_n$ équidistants :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad a_i = a + ih,$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision. On considère alors la formule approchée

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes.* L'erreur associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)dx - T_n(f).$$

Q15. Représenter graphiquement $T_n(f)$.

Q16. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $g_i : t \in [0, 1] \mapsto f(a_i + ht)$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où e est l'erreur associée à la formule approchée I_1 étudiée à la question **Q14.**

Q17. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Polynômes orthogonaux

Pour toutes fonctions f et g de $C(I, \mathbb{R})$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

Q18. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $C(I, \mathbb{R})$.

Dans la suite, on munit $C(I, \mathbb{R})$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est unitaire (*ie* de coefficient dominant égal à 1),

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$,

(c) la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j\rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

On dit que les (p_n) sont les *polynômes orthogonaux associés au poids* w. On s'intéresse aux racines des polynômes p_n.

On note $I = [a, b]$ et $\mathring{I} =]a, b[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, \ldots, x_k$ les racines distinctes de p_n qui sont dans $\mathring{I}$ et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Q19. Montrer que $(p_0, \ldots, p_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q20. Montrer que $\deg(q) \leqslant n$ avec égalité si et seulement si p_n possède n racines distinctes simples dans $\mathring{I}$.

Q21. En étudiant $\langle p_n, q \rangle$, montrer que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{I}$.
On pourra raisonner par l'absurde.

Méthode de Gauss

Considérons la formule approchée

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

On suppose que les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ sont choisis comme à la question **Q9.** :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) \mathrm{d}x,$$

où $(L_0, \ldots, L_n)$ est la base de Lagrange associée aux points $(x_0, \ldots, x_n)$. D'après la question **Q9.**, la formule approchée $I_n(f)$ est d'ordre $m \geqslant n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un unique choix des points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ qui permet d'obtenir l'ordre m le plus élevé possible.

Q22. Posons $Q_n = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$. En raisonnant avec le polynôme Q_n^2, montrer que $m \leqslant 2n+1$.

Q23. Montrer que $m = 2n+1$ si et seulement si les x_i sont les racines de p_{n+1}.

Exemple

On se place ici dans le cas où $I = [-1, 1]$ et $w(x) = 1$.

Q24. Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux (p_0, p_1, p_2, p_3) associés au poids w.

Q25. En déduire explicitement une formule approchée d'ordre 5 en appliquant la méthode de Gauss à partir de (p_0, p_1, p_2, p_3) (on déterminera les points x_j et les coefficients λ_j).

Fin de l'énoncé