

## Problème 1

Un dipôle électrocinétique **AB** est constitué d'un condensateur de capacité  $C$ , d'une bobine  $\mathcal{B}$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ , montés en série. Ce dipôle **AB** est alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale  $u_e(t) = U_m \cos \omega t$ , de période  $T$  et de pulsation  $\omega$ .

### I. Filtre « passe-bande »

La bobine  $\mathcal{B}$ , d'inductance  $L$ , est supposée sans résistance. Soit  $u_s(t) = V_M V_B$ , la tension de sortie aux bornes du résistor (figure 5).

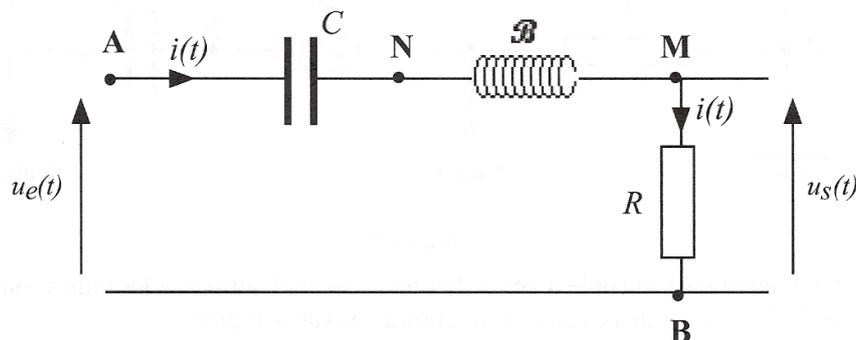


Figure 5

- 1) Soient  $u_s$  et  $u_e$  les amplitudes complexes respectives des tensions de sortie et d'entrée.
  - 1.1. Écrire l'impédance complexe  $Z_{AB}(j\omega)$  du dipôle **AB**. On rappelle l'égalité  $j^2 = -1$ .
  - 1.2. Exprimer, en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ , la fonction de transfert (ou transmittance) définie par le rapport complexe  $H(j\omega) = u_s/u_e$ .
- 2) On pose  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (pulsation propre),  $x = \omega/\omega_0$  (variable sans dimension) et  $Q = L\omega_0/R$  (facteur de qualité).
  - 2.1. Donner, en fonction de  $Q$  et  $x$ , une expression simplifiée  $H(jx)$  de la fonction de transfert.
  - 2.2. Cette fonction  $H(jx)$  est caractérisée par son argument  $\varphi(x)$  (ou déphasage entre les deux tensions  $u_s$  et  $u_e$ ). Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle ces deux tensions sont en phase.
  - 2.3.  $H(jx)$  est aussi caractérisée par son gain (ou module)  $G(x)$ . Montrer que, quelle que soit la valeur de  $Q$ ,  $G(x)$  admet une même valeur maximale  $G_{max}$ .
- 3) La bande passante de ce circuit est le domaine de  $x$  pour lequel  $(G_{max}/\sqrt{2}) \leq G(x) \leq G_{max}$ .
  - 3.1. Exprimer, en fonction de  $Q$ , l'étendue  $\Delta x$  de cette bande passante.
  - 3.2. En déduire que la sélectivité du filtre « passe-bande » (bande passante  $\Delta\omega$  étroite) est liée au facteur de qualité  $Q$ , et donc à la valeur de  $R$  pour une inductance donnée.
  - 3.3. Soient  $Q_a$  et  $Q_b$  deux valeurs de  $Q$  telles que  $Q_a > Q_b$ . Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions  $G_{Q_a}(\omega)$  et  $G_{Q_b}(\omega)$ , et faire apparaître les bandes passantes  $\Delta\omega_a$  et  $\Delta\omega_b$  correspondantes.

### II. Détermination des caractéristiques de la bobine $\mathcal{B}$

Le filtre précédent (§ C.I.) ne donne pas entière satisfaction. La cause est attribuée à une résistance  $r$  non nulle de la bobine  $\mathcal{B}$ , hypothèse qu'on se propose de vérifier.

Un oscillographe bicourbe permet d'étudier :

- sur la voie **I**, la tension  $u_I(t) = V_M V_B$  aux bornes du résistor ;
- sur la voie **II**, la tension  $u_{II}(t) = V_A - V_R$  aux bornes du dipôle **AB** (figure 6).

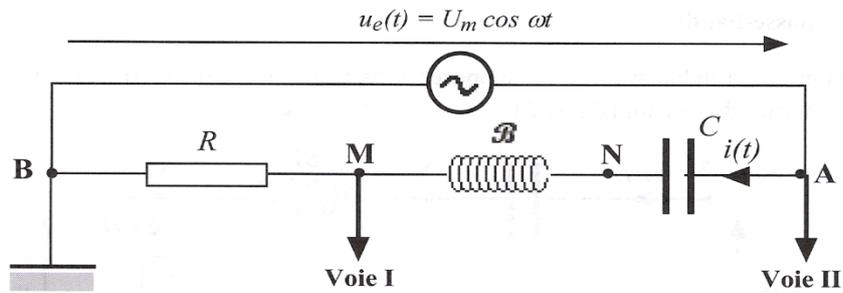
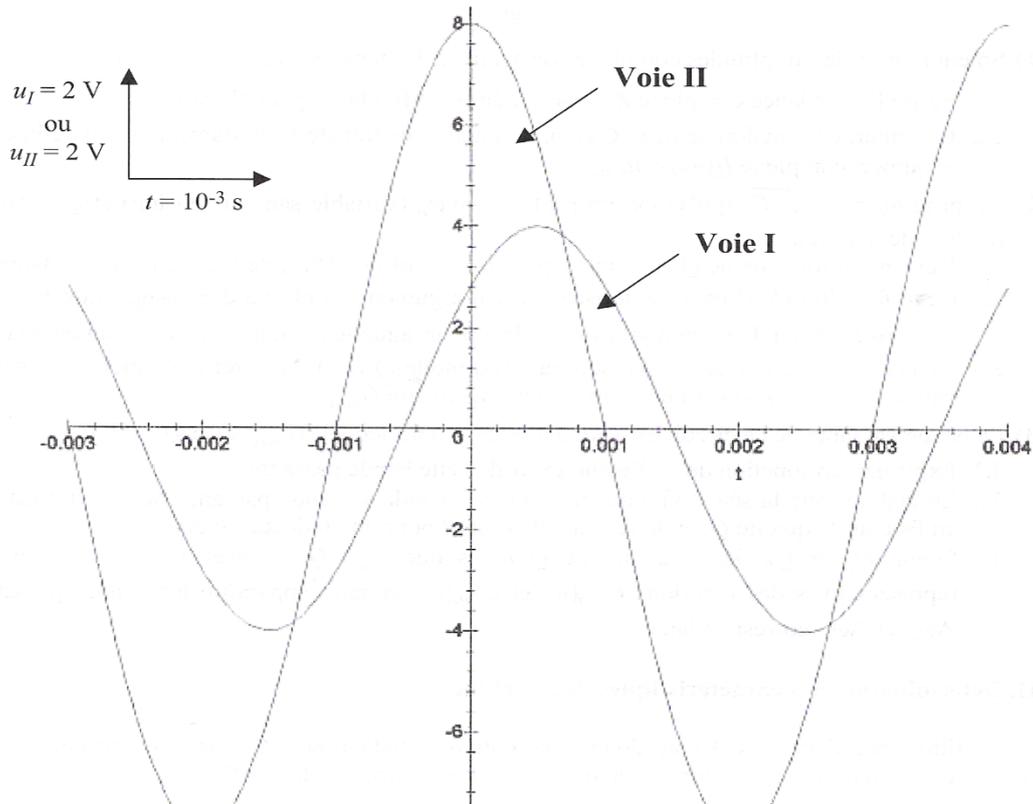


Figure 6

L'oscillogramme (ou copie d'écran de l'oscilloscope), ainsi que les indications sur l'échelle commune utilisée pour les deux voies, sont reproduites sur la figure 7.



Données :  $R = 20 \Omega$ ;  $C = 10 \mu\text{F}$ .

- 1) L'oscillogramme permet de calculer les valeurs de la période  $T$ , de la pulsation  $\omega$ , des amplitudes  $U_m$  et  $I_m$ , et de l'impédance réelle  $Z_{AB}$ . Déterminer ces valeurs numériques et **recopier, en le complétant**, le tableau suivant (figure 8) :

Grandeur	$T$ (s)	$\omega$ (rad s <sup>-1</sup> )	$I_m$ (A)	$U_m$ (V)	$Z_{AB}$ ( $\Omega$ )
Valeur numérique					

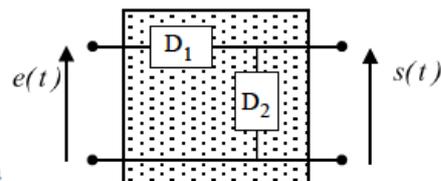
Figure 8

- 2) Des deux tensions  $u_I$  et  $u_{II}$ , quelle est celle qui est en avance de phase sur l'autre ?
- 3) Calculer le déphasage  $\varphi$  entre la tension  $u_e(t) = U_m \cos \omega t$  et l'intensité du courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .
- 4) Montrer que, dans l'hypothèse d'une bobine idéale  $\mathcal{B}$  de résistance  $r$  nulle, les valeurs numériques de  $Z_{AB}$ ,  $\varphi$  et  $R$  (donnée de l'énoncé) sont incohérentes.
- 5) Il est donc nécessaire de prendre en compte la résistance  $r$  de la bobine. Calculer  $r$ .
- 6) En déduire la valeur numérique de l'inductance  $L$ .

## Problème 2

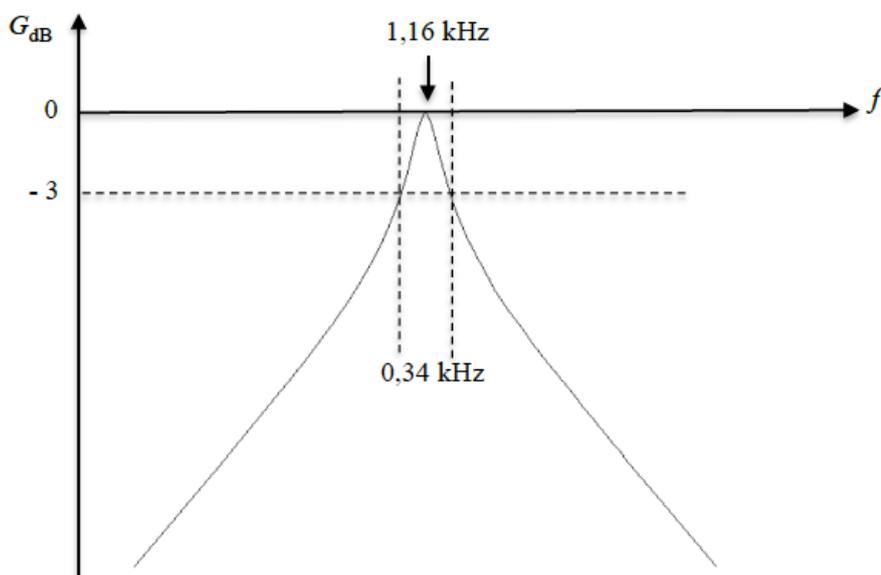
Un quadripôle est constitué de deux dipôles  $D_1$  et  $D_2$ , disposés comme l'indique la figure.

Seules les bornes d'entrée et de sortie sont accessibles à l'expérimentateur. Ce dernier alimente le filtre par un générateur de tension sinusoïdale parfait  $e(t) = E_0 \cos \omega t$ , et effectue une étude en fréquence de la réponse du système.



Il relève le tracé expérimental suivant qui a été modélisé avec un tableur à l'aide de la fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$



1) Déterminer les valeurs numériques de  $\omega_0$  et  $Q$ .

2) Effet du filtre sur un signal non sinusoïdal.

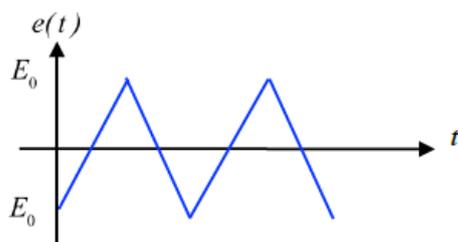
On peut décomposer les signaux périodiques de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , d'entrée et de sortie sous la forme :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \text{et} \quad s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \Phi_n).$$

On définit le taux de distorsion harmonique par  $\delta = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} S_n^2}}{S_1}$ .

a) Relier  $S_n$  à  $E_n$  grâce à la fonction de transfert.

b) On applique un signal périodique avec  $T = 1$  ms et  $E_0 = 1$  V de la forme suivante :

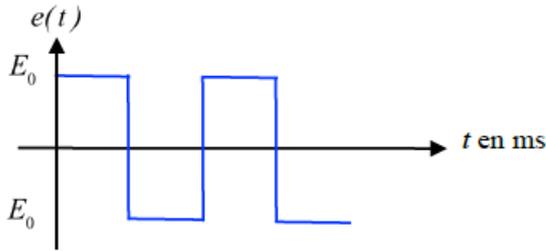


La décomposition de Fourier de ce signal est donnée par l'expression :

$$e(t) = \frac{-8E_0}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2} \quad \text{avec} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Montrer que le signal de sortie pour  $T = 1 \text{ ms}$  et  $E_0 = 1 \text{ V}$  est, en bonne approximation, sinusoïdal.

c) On s'intéresse maintenant au signal suivant, toujours de période  $T = 1 \text{ ms}$ , et avec  $E_0 = 1 \text{ V}$ :



La décomposition de Fourier de ce signal est cette fois-ci donnée par :

$$e(t) = \frac{4E_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}$$

Peut-on encore considérer le signal de sortie comme sinusoïdal ?

3) Résolution de problème : détermination des composants du filtre.

On sait que le constructeur a utilisé pour construire le filtre un seul résistor de résistance  $R$ , un seul condensateur de capacité  $C$  et une seule bobine d'inductance  $L$ . Ces trois dipôles ont été associés en série ou en parallèle de façon à former les dipôles  $D_1$  et  $D_2$ . Pour avoir des informations supplémentaires sur le filtre, l'expérimentateur relie l'entrée du filtre à un générateur de tension continu de f.e.m  $U_0 = 15 \text{ V}$ , la sortie étant ouverte. Il mesure alors en régime établi un courant d'entrée d'intensité  $I_0 = 15 \text{ mA}$ .

- Déterminer la disposition des composants dans le quadripôle.
- Déterminer la valeur numérique des composants.

## Problème 3

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.



Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ .

À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

## I. — Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse  $m$ , dont le centre d'inertie  $G$  est repéré par la position  $x$  dans le référentiel galiléen  $(O, \hat{u}_x)$  - voir figure 1. L'origine  $O$  se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité  $\alpha$ , exerçant sur  $m$  une force de frottement  $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$ . À tout instant  $t$ , on assimile la distance  $OG$  à la longueur  $\ell(t)$  du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur avec  $\vec{g} = -g \hat{u}_x$  avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

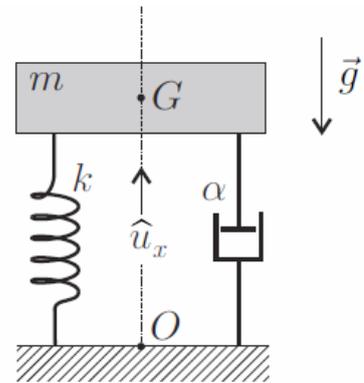


FIGURE 1 – Oscillateur

❑ 1 – En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle  $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$  dans laquelle on a introduit la fonction  $X(t) = x(t) - \tilde{x}$  où  $\tilde{x}$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $g$ ,  $\omega_0$  et  $l_0$ . On précisera les expressions et significations de  $\omega_0$  et  $\xi$ .

❑ 2 – Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles  $X(0) = X_0 \neq 0$  et  $\dot{X} = V_0 \neq 0$ . Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de  $\omega_0$ ,  $\xi$ ,  $X_0$ ,  $V_0$  et  $t$ ) pour les cas  $\xi = 0$  et  $0 < \xi < 1$  et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit  $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$ , avec  $\beta > 0$ . Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage)  $F(t)$  de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

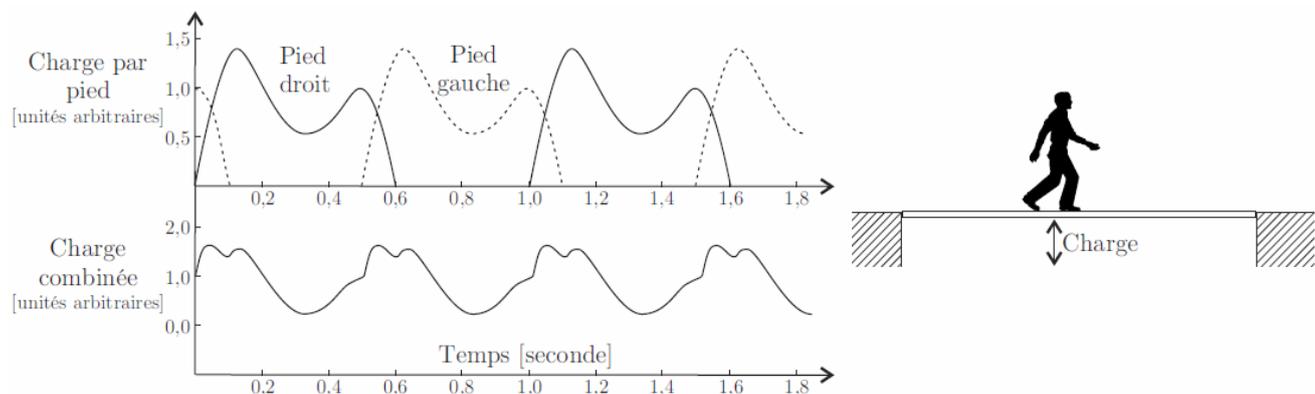


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique  $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$ .

Le vecteur  $\vec{F}_0$  correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence  $f$  correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que  $\vec{F}_1 = 0,4\vec{F}_0$ . Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme  $-\hat{u}_x$ .

On note  $F_0 = \|\vec{F}_0\|$  le module de la force statique,  $Y = X + F_0/m\omega_0^2$  la réponse en déplacement de l'oscillateur et  $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$  sa représentation complexe.

❑ 3 – Que devient l'équation de l'oscillateur en  $Y$  sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement  $Y$  sur la représentation complexe de l'excitation  $\underline{E} = F_1/m$ . On exprimera  $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$  en fonction de  $\zeta$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega = \omega/\omega_0$ .

❑ 4 – Sous quelle condition portant sur  $\zeta$  un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation  $\omega_r$ , obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance  $|\underline{H}|(\omega_r)$  dans la limite  $\zeta^2 \ll 1$ .

❑ 5 – En se plaçant dans l'hypothèse  $\zeta^2 \ll 1$  et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de  $\zeta$  ainsi que la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

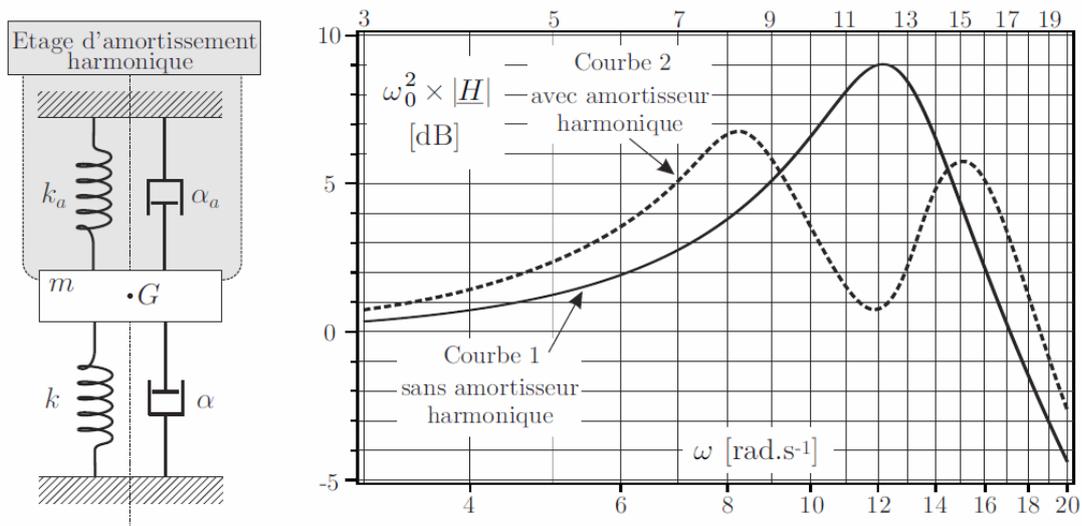


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge

❑ 6 – Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

❑ 7 – Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée

sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en  $N = 300$  points équidistants sur un intervalle  $[t_{\min}, t_{\max}]$ . Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

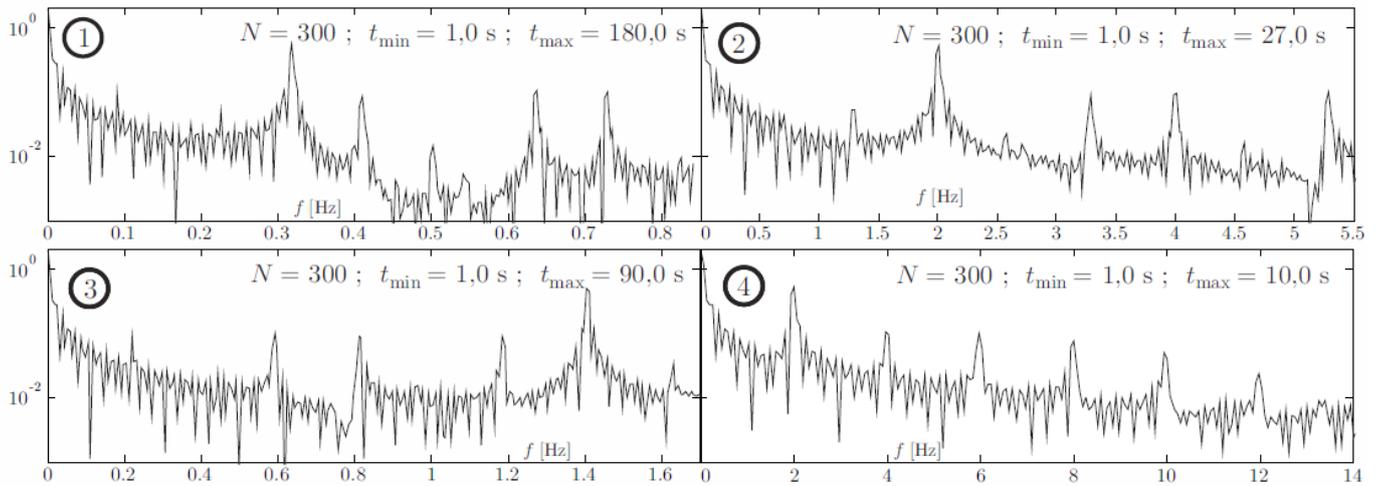


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d’un piéton

- ❑ 8 – Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?
- ❑ 9 – À partir d’une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l’origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l’installation d’amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.