Problème 3

I. — Oscillateur simple

❑ 1 – La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse donne : $m\vec{a} = \vec{F}_f + m\vec{g} - k(x - \ell_0)\,\hat{u}_x$ qui, projeté sur l'axe Ox, donne $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$. À l'équilibre $0 = -mg - k(\tilde{x} - \ell_0)$. En soustrayant les deux équations précédentes et en posant $X = x - \tilde{x}$, on obtient $\ddot{X} = -\frac{\alpha}{m}\dot{X} - \frac{k}{m}X$. On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui est la pulsation propre (pulsation du régime libre sans amortissement), $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ qui est le facteur d'amortissement, sans dimension, et $\tilde{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$ position d'équilibre.

❑ 2 – L'équation caractéristique $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ est de discriminant réduit $\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 < 0$, les solutions sont donc de type $X(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right)\exp\left(-\xi\omega_0 t\right)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Avec les conditions initiales données, on obtient : $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_0}\sin(\omega t)\exp(-\xi\omega_0 t)$.

Pour $\xi = 0$, $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega t)$.

Avec une force $\vec{F}_v = \beta\dot{x}\hat{u}_x$, cela revient à remplacer α par $\alpha - \beta$. Le terme d'ordre 1 peut devenir négatif ce qui engendre une instabilité : solution avec exponentielle divergente au lieu de sinusoïdale amortie : à l'aide de « $x^2 - Sx + P = 0$ », on voit que l'on a un produit positif, donc racine de même signe ou norme des deux racines conjuguées et une somme positive, donc deux racines positives ou complexes à partie réelle positive.

❑ 3 – Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox devient

$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0) - F_0 - F_1\cos(2\pi f t)$, soit $\ddot{X} = -\xi\omega_0\dot{X} - \omega_0^2 X - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$,

soit encore en prenant comme variable Y : $\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$.

Réécrit en complexe, on obtient $\underline{Y}\left(-\omega^2 + 2\mathrm{j}\omega\xi\omega_0 + \omega_0^2\right) = -\underline{E}$.

$$\underline{H} = -\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{1 + 2\mathrm{j}\xi\Omega - \Omega^2}$$

❑ 4 – On a affaire à un passe-bas qui pourra présenter un phénomène de résonance si la norme de $\underline{H}$ présente un maximum, ce qui est le cas si la norme au carré du dénominateur présente un minimum. On pose $z(\Omega) = \left|\frac{1}{\omega_0^2\underline{H}}\right|^2 = \left(1 - \Omega^2\right)^2 + (2\xi\Omega)^2$.

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\Omega} = -2\left(1 - \Omega^2\right)2\Omega + 8\xi^2\Omega$ qui s'annule (en dehors de 0, minimum ou maximum attendu d'un passe-bas), si $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, pour $\Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}$. Pour $\xi^2 \ll 1$, on a $\omega_r \approx \omega_0$, au deuxième ordre près en ξ, et $|H(\omega_r)| \approx \dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{1}{2\xi}$.

❑ 5 – L'asymptote horizontale à basse fréquence est à 0 dB, le maximum se situe à $\omega = 12\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ soit $f = 1{,}9\,\mathrm{Hz}$ et vaut 9 dB soit $\omega_0^2\left|\underline{H}\right|_{\max} = 10^{9/20} = 2{,}8$ et $\xi \approx \dfrac{1}{2\left(\omega_0^2 H_{\max}\right)} = 0{,}18$.

❑ 6 – On a vu dans la question 4 que le déplacement de le structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance (cf. l'introduction). Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction.

❑ 7 – On peut envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations et faire ensuite $\vec{F} = m\vec{a}$. Un capteur de force par extensométrie fixé au tablier pose problème car le piéton se déplace, problème que l'on peut résoudre à l'aide d'un tapis roulant. On peut également envisager une prise de vue video avec des marqueurs.

❑ 8 – La fréquence maximale des spectres correspond à la moitié de la fréquence d'échantillonnage noté f_e.

D'après le graphe 4, de fréquence d'échantillonnage la plus grande, $f_e = 300/(10-1) = 33{,}3\,\mathrm{Hz}$, donc sans problème de repliement jusqu'à $f_e/2 = 16{,}7\,\mathrm{Hz}$, la fréquence de la force verticale due à la marche est de 2 Hz avec présence d'harmoniques 4, 8, 10 et 12.

Pour le graphe 3, de $f_e = 300/89 = 3{,}37\,\mathrm{Hz}$, on a repliement du fondamental à $3{,}37 - 2 = 1{,}37 \approx 1{,}4\,\mathrm{Hz}$ et du deuxième harmonique à $|3{,}37-4| = 0{,}63\,\mathrm{Hz}$.

Pour le graphe 2, de $f_e = 300/26 = 11{,}5\,\mathrm{Hz}$, on observe le fondamental, le deuxième harmonique et le repliement du quatrième harmonique à $11{,}5 - 8 = 3{,}5 \approx 3{,}2\,\mathrm{Hz}$.

Pour le graphe 1, de $f_e = 300/179 = 1{,}7\,\mathrm{Hz}$, on observe le repliement du fondamental à $|1{,}7-2| = 0{,}3\,\mathrm{Hz}$.

La fréquence de la marche est de l'ordre de 1 Hz, les deux pieds jouant un rôle symétrique, la fréquence de la force verticale est le double.

❑ 9 – La fréquence de résonance du pont correspond à la fréquence de la marche !

Le système d'« amortisseur » n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre dédoublé la résonance en créant une anti résonance pour la fréquence de la marche (-8 dB cette fois). L'explication vient donc du couplage des deux oscillateurs, hors programme.