

Se limiter à la première partie pour les 3/2

PREMIERE PARTIE GEOMETRIE DE LA MOLECULE D'EAU

La structure de la molécule d'eau est complexe et une description précise nécessite l'utilisation de la mécanique quantique. Dans cette partie, une modélisation simple permet de comprendre la géométrie de la molécule.

Données : Constante de gravitation : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ uSI}$
 Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
 Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 Masse d'un atome d'hydrogène : $m_H = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
 Masse d'un atome d'oxygène : $m_O = 2,7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$
 Distance entre les centres des ions H^+ et O^{2-} dans H_2O : $L \cong 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

A / APPROCHE ELECTROSTATIQUE DE LA MOLECULE D'EAU

Une charge ponctuelle q_1 est fixée au point O.

A1. Rappeler l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé dans le vide par la charge ponctuelle q_1 en un point M situé à la distance r du point O (le potentiel sera pris nul à l'infini).

Une deuxième charge q_2 est placée en un point N, à la distance L de O (figure 1).

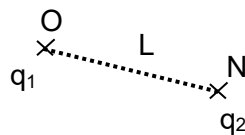


Figure 1

A2. En déduire l'énergie potentielle d'interaction électrostatique W_{12} entre les deux particules chargées q_1 et q_2 .

Les deux particules chargées q_1 et q_2 ont des masses respectives m_1 et m_2 .

A3. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $W_{\text{grav},12}$ entre les deux particules chargées q_1 et q_2 .

Calculer le rapport $\eta = |W_{12} / W_{\text{grav},12}|$ si la charge q_1 est un ion hydrogène H^+ et q_2 un ion oxygène O^{2-} . Qu'en déduire pour une étude énergétique de la molécule d'eau ?

La molécule d'eau peut approximativement être décrite de la manière suivante (figure 2) : un ion ponctuel O^{2-} est à la distance L de deux ions ponctuels H^+ , l'angle $\angle HOH$ étant noté 2θ .

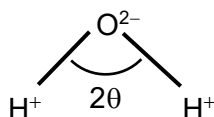


Figure 2

A4. Déterminer l'énergie d'interaction électrostatique W_{HH} entre les deux ions H^+ , puis l'énergie d'interaction W_{OH} entre un ion H^+ et l'ion O^{2-} , en fonction notamment de la charge élémentaire e, de L et de l'angle θ .

L'énergie potentielle électrostatique W de la molécule d'eau s'exprime, en supposant comme précédemment les charges ponctuelles, sous la forme : $W = W_{HH} + 2 W_{OH}$.

A5. Expliquer les signes de W_{HH} et W_{OH} . Justifier la présence du facteur 2.

La fonction $W(L, \theta)$ représente l'énergie potentielle de la molécule d'eau.

Dans la suite, la longueur L sera supposée fixe. L'expression de l'énergie potentielle de la molécule d'eau $W(\theta)$ sera fonction uniquement de l'angle θ .

A6. Quelle est la valeur θ_0 de l'angle à l'équilibre, prévu par la modélisation précédente ? Cet équilibre est-il stable ? Comment expliquer simplement la valeur de θ_0 ?

A7. En faisant appel aux connaissances acquises dans le cours de chimie, expliquer quelle valeur est attendue pour θ_0 . Le résultat de la question précédente est-il satisfaisant ?

Une description plus élaborée de la molécule d'eau fait intervenir l'étendue spatiale de l'ion O^{2-} , les ions H^+ étant toujours considérés comme ponctuels. Le champ créé par les ions H^+ perturbe la répartition de charge à l'intérieur de O^{2-} , et par conséquent modifie l'énergie d'interaction électrostatique des charges.

En première approche, étudions un atome constitué, selon le modèle simplifié de THOMSON (1904), d'un noyau de charge $+q$ réparti uniformément en volume dans une boule B de centre O et de rayon R , et d'électrons. Ces électrons sont représentés par une charge ponctuelle unique $-q$, soumise au champ du noyau (figure 3). La position de cette charge $-q$ à un instant quelconque est repérée par le point M .

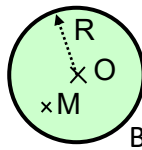


Figure 3

A8. Evaluer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par le noyau seul en un point M intérieur à la boule B , en fonction notamment de q , R et $\overline{OM}$.

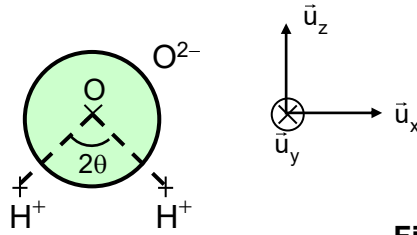
A9. Exprimer la force de LORENTZ subie par la charge $-q$. En déduire sa position d'équilibre, repérée par le vecteur $\vec{r}_{eq}$, de la charge $-q$ dans le champ du noyau. L'équilibre est-il stable ?

L'atome est alors placé dans un champ électrique extérieur uniforme et stationnaire $\vec{E}_0$. Il sera admis que la distribution de charges du noyau n'est pas modifiée par l'action du champ $\vec{E}_0$.

A10. Quelle est la nouvelle position d'équilibre, repérée par $\vec{r}'_{eq}$, de la charge $-q$ en fonction de $\vec{E}_0$, q , ϵ_0 et R ? (la valeur du champ $\vec{E}_0$ est supposée suffisamment faible pour que cette position d'équilibre se situe à l'intérieur de la sphère de centre R)

A11. Montrer que l'atome acquiert alors un moment dipolaire $\vec{p}_i$ (dit induit) de la forme :
 $\vec{p}_i = \epsilon_0 \alpha_{pol} \vec{E}_0$, où α_{pol} sera exprimé en fonction de R .

Revenons au cas de la molécule d'eau. Elle est désormais modélisée par un ion oxygène O^{2-} de rayon R centré en O et de deux ions ponctuels H^+ . L'angle $\angle HOH$ est toujours noté 2θ et la distance du centre O à un ion H^+ vaut L (figure 4, représentant le plan de la molécule d'eau).

**Figure 4**

Le champ extérieur $\vec{E}_0$ modifiant la répartition de charge de l'ion O^{2-} est celui engendré par les deux ions H^+ au niveau du centre O de l'ion O^{2-} .

A12. Exprimer le champ $\vec{E}_0$ en fonction notamment de la charge élémentaire e , de L et de θ .

L'expression établie en question A11 donnant le moment dipolaire induit d'un atome est supposée toujours valable dans le cas de l'ion O^{2-} . L'énergie potentielle électrostatique associée à la déformation de la répartition de charge s'écrit alors : $W' = -\vec{p}_i \cdot \vec{E}_0 / 2$. Au final, l'énergie potentielle totale de la répartition de charge vaut $W_{\text{tot}} = W + W'$, où W a été déterminé à la question A5.

A13. Ecrire $W_{\text{tot}}(\theta)$ sous la forme : $W_{\text{tot}}(\theta) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 L} \left(A_1 + \frac{A_2}{\sin \theta} + A_3 \cos^2 \theta \right)$.

Déterminer les coefficients A_1 , A_2 et A_3 en fonction de L et R .

A14. En déduire les positions d'équilibre. Les calculer sachant que le rayon de l'ion O^{2-} vaut $R \cong 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

A15. Tracer l'allure de $W_{\text{tot}}(\theta)$ en fonction de θ . En déduire la stabilité des positions d'équilibre obtenues précédemment.

A16. Commenter ces résultats.

DEUXIEME PARTIE
PROPAGATION D'UNE MICRO-ONDE DANS UN ALIMENT SURGELE

Dans un four à micro-ondes, une onde électromagnétique est créée afin de permettre le réchauffement d'aliments. Le but de cette partie est d'étudier la structure d'une micro-onde au cours de la traversée d'un aliment.

Données : Pour un champ vectoriel $\vec{A}$, rappelons que : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Le complexe j est tel que $j^2 = -1$.

B / ELECTROMAGNETISME DANS UN MILIEU DIELECTRIQUE

B1. La molécule d'eau est-elle polaire ? (justifier clairement la réponse)

Calculer l'ordre de grandeur du moment dipolaire en supposant comme dans la partie A que la molécule est une association de trois ions (utiliser le cas échéant pour la valeur de l'angle $\angle \text{HOH}$ l'ordre de grandeur $2\theta \approx 90^\circ$).

La quantité ainsi obtenue est-elle à votre avis supérieure ou inférieure à la valeur expérimentale ? Pourquoi ?

B2. Définir le vecteur polarisation $\vec{P}$ d'un milieu diélectrique et rappeler l'unité de cette grandeur. Pourquoi la polarisation $\vec{P}$ de l'eau ou d'un aliment contenant de l'eau est-elle considérée comme nulle ?

Plaçons un dipôle permanent $\vec{p}$ dans un champ électrique $\vec{E}$ stationnaire et uniforme spatialement.

B3. Quelles sont les possibilités d'orientation à l'équilibre du dipôle $\vec{p}$ dans le champ $\vec{E}$? Préciser leur stabilité.

Désormais, le champ est supposé oscillant : $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$; $\vec{E}_0$ est un vecteur donné et la pulsation ω est considérée comme faible.

B4. Décrire qualitativement l'effet de l'oscillation temporelle du champ sur l'orientation du dipôle. Que se passe-t-il si la pulsation ω est progressivement augmentée ? Quelles sont les conséquences du point de vue thermique ?

Dans la suite de cette partie sera étudiée la propagation d'une micro-onde dans un aliment congelé, qui sera considéré comme un matériau diélectrique homogène, isotrope, dépourvu de courants et charges libres. Dans ce milieu, la polarisation $\vec{P}$ vérifie l'équation suivante en présence d'un champ électrique $\vec{E}$:

$$\tau \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E}, \quad \text{où } \tau = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ s et } \chi_0 = 75 \text{ sont des constantes.}$$

L'onde étudiée s'exprime en notation complexe sous la forme : $\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - \underline{k}x) \vec{u}$, où E_0 est une constante réelle, ω la pulsation, $\underline{k} = k_1 + jk_2$ le vecteur d'onde, éventuellement complexe et $\vec{u}$ un vecteur unitaire fixé. Les autres champs comportent un terme de phase similaire.

B5. Donner le sens physique des grandeurs χ_0 et τ . Pour cette dernière, étudier l'expression de l'évolution de la polarisation $\vec{P}$ dans le cas où le champ électrique est annulé à partir de $t = 0$.

B6. Montrer que la susceptibilité complexe $\underline{\chi}(\omega)$ du milieu diélectrique s'écrit :

$$\underline{\chi}(\omega) = \chi_1(\omega) + j\chi_2(\omega), \text{ avec } \chi_1(\omega) = \chi_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \text{ et } \chi_2(\omega) = \chi_0 \frac{\beta \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

où β est un nombre qu'il conviendra d'expliciter.

B7. Donner l'allure des courbes $\chi_1(\omega)$ et $\chi_2(\omega)$. Faire intervenir les valeurs χ_0 et $1/\tau$ sur les tracés. Commenter ces courbes (limites basse et haute pulsation, point(s) particulier(s)).

Dans tout milieu diélectrique possédant la polarisation $\vec{P}$ existe une densité volumique de courants liés $\vec{j}_\ell = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

B8. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge. En déduire que l'expression de la densité volumique de charges liées s'écrit : $\rho_\ell = K \operatorname{div} \vec{P}$, où K est une constante à expliciter. Préciser l'unité de la densité de courants liés $\vec{j}_\ell$ dans le Système International.

B9. Ecrire les équations de MAXWELL dans le matériau diélectrique, en faisant intervenir les seuls champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$.

B10. Montrer que le champ $\vec{E}$ est transverse. Que dire de la direction de $\vec{u}$?

Dans la suite, $\vec{u}$ sera choisi tel que $\vec{u} = \vec{u}_y$.

B11. Trouver une équation vérifiée seulement par le champ électrique $\vec{E}$ (équation de propagation).

B12. En déduire l'équation de dispersion, soit l'expression de $\underline{k}^2$ en fonction de ω , c et $\underline{\chi}$.

B13. En supposant que $\chi_0 \ll 1$ et $\omega\tau \ll 1$, trouver des nombres réels r_1 et r_2 (à exprimer en fonction de χ_0 , ω et τ) tels que $1 + \underline{\chi} \cong (r_1 + jr_2)^2$.

(la relation $\sqrt{1+x} \cong 1 + x/2$ pour $x \ll 1$ pourra être utilisée)

B14. Ecrire le vecteur d'onde $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = k_1 + jk_2$. Exprimer les parties réelle k_1 et imaginaire k_2 , en fonction de ω , c , χ_0 , et τ .

B15. En déduire l'expression précise du champ électrique réel $\vec{E}$ en faisant notamment intervenir k_1 et k_2 . Commenter la forme de l'onde obtenue : est-elle plane, progressive (si oui, dans quelle direction), stationnaire (si oui, par rapport à quelle direction) ? Quelle est sa polarisation ? *(toutes ces réponses seront clairement justifiées)*

B16. Exprimer la longueur d'onde λ de l'onde dans le diélectrique. Ecrire l'amplitude sous la forme $E_0 \exp(-x/\delta)$ et exprimer δ en fonction de k_1 et(ou) k_2 . Pourquoi l'amplitude de l'onde varie-t-elle ? Préciser le sens physique de δ .

B17. Calculer $\omega\tau$, λ , puis δ pour une fréquence $f = 2,45$ GHz. Commenter le résultat.

B18. Sans faire de calcul, donner la direction du vecteur de POYNTING moyen, ainsi que l'expression de sa dépendance par rapport aux variables spatiales.