

A1. Question de cours :

$$V(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

A2. Résultat de cours : on peut définir l'énergie potentielle d'interaction électrostatique W_{12} comme $W_{12} = q_1 V_{2 \rightarrow 1} = q_2 V_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}(q_2 V_{1 \rightarrow 2} + q_1 V_{2 \rightarrow 1})$. En utilisant la deuxième possibilité on obtient :

$$W_{12} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

A3. On utilise l'analogie électrostatique/gravitation qui donne : $q \leftrightarrow m$ et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$ pour obtenir :

$$W_{grav,12} = -\frac{Gm_2 m_1}{r}.$$

On a $\eta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2}$, on prend ici $q_1 = +e$, $q_2 = -e$ et on assimile la masse des ions à la masse des atomes associés donnée dans l'énoncé. En faisant le calcul : $\eta = 7.5 * 10^{34}$, on peut donc négliger l'interaction gravitationnelle par rapport à l'électrostatique.

A4. On utilise la formule de W_{12} , la distance entre les deux H^+ vaut $d_{HH} = 2L \sin(\theta)$ et $q_1 = q_2 = +e$ d'où

$$W_{HH} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d_{HH}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin(\theta)},$$

de la même façon pour W_{OH} on a $d_{OH} = L$, $q_1 = +e$ et $q_2 = -2e$, d'où :

$$W_{OH} = -\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

A5. $W_{HH} > 0$ donc le minimum est atteint pour $d_{HH} \rightarrow \infty$ ce qui est cohérent avec le fait que les deux charges positives se repoussent, de même $W_{OH} < 0$ donc le minimum est atteint pour $d_{OH} \rightarrow 0$, cohérent avec l'attraction entre les charges de signes opposées.

On compte deux fois W_{OH} car il y a deux "liaisons" O-H.

A6. On cherche θ tel que $\frac{dW}{d\theta} = 0$, on obtient :

$$\frac{dW}{d\theta} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 L} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2},$$

d'où $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$. On garde ici la solution positive $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ car les deux sont équivalentes. Pour la stabilité on cherche le signe de la dérivée seconde en $\frac{\pi}{2}$, on obtient $+1$ donc l'équilibre est stable. Cela correspond à la disposition linéaire suivante : $H^+ - O^{2-} - H^+$, les ions hydrogènes cherchent à s'éloigner au maximum car les charges de même signe se repoussent.

A7. On attend $2\theta_0 = 104.5^\circ$ avec la méthode VSEPR. Le résultat précédent n'est donc pas satisfaisant.

A8. Le problème est à symétrie sphérique donc le champ électrique ne dépend que de la coordonnée radiale sphérique $r = OM$. Tous les plans passant par O et M sont plans de symétrie

donc le champ électrique appartient à leur intersection, il est donc selon $\vec{e}_r$. On cherche donc un champ de la forme $\vec{\mathcal{E}}_1(M) = \mathcal{E}(r)\vec{e}_r$. On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon $r < R$ centrée en O :

$$\oiint \vec{\mathcal{E}}_1(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

D'abord, comme $d\vec{S} = dS\vec{e}_r$ car on oriente toujours vers l'extérieur, on a :

$$\oiint \vec{\mathcal{E}}_1(M) \cdot d\vec{S} = \oiint \mathcal{E}_1(r)dS = \mathcal{E}_1(r) \oiint dS = 4\pi r^2 \mathcal{E}_1(r),$$

puis la charge $+q$ étant uniformément répartie, on a une charge volumique dans la sphère $\rho = q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ donc $Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = qr^3/R^3$. On conclut donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}_1(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{R^3}.}$$

A9. La force de Lorentz vaut en l'absence de champ magnétique $\boxed{\vec{F} = -q\vec{\mathcal{E}}_1(M).}$

La position d'équilibre est obtenue quand $\vec{F} = \vec{0}$, ici donc quand $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r}_{eq} = \vec{0}.}$

On vérifie la stabilité par le raisonnement suivant : si on écarte de $\varepsilon\vec{e}_r$ la particule de la position d'équilibre, elle subit une force :

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon\vec{e}_r}{R^3}$$

qui est dans le sens opposé à $\varepsilon\vec{e}_r$, la particule est donc ramenée vers la position d'équilibre, cette dernière est donc stable.

A10. La force de Lorentz est maintenant : $\vec{F} = -q(\vec{\mathcal{E}}_1(M) + \vec{\mathcal{E}}_0)$. La position d'équilibre est celle ayant une force nulle donc un champ électrique nul, ainsi :

$$\boxed{\vec{r}_{eq} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{q} \vec{\mathcal{E}}_0,}$$

où on a utilisé le champ électrique calculé en A8, valable en supposant que la position d'équilibre reste à l'intérieur de l'atome.

A11. Comme on admet que la distribution de charges du noyau n'est pas modifiée, le barycentre des charges positifs reste en O . Le barycentre des charges négatives est le point M qui est maintenant à l'équilibre en un point différent de O donc il apparaît un moment dipolaire valant, par définition, $\vec{p}_i = q\overrightarrow{MO} = -q\vec{r}_{eq}$. En remplaçant on obtient : $\vec{p}_i = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{\mathcal{E}}_0$ d'où on identifie :

$$\boxed{\alpha_{pol} = 4\pi R^3.}$$

A12. Le champ $\vec{\mathcal{E}}_0$ est celui engendré par les deux H^+ en O , les plans Oyz et Oxz sont plans de symétrie, donc le champ est porté par $\vec{e}_z$. On utilise le champ électrique créé par une charge seule A en un point B : $\vec{\mathcal{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 AB^3} \overrightarrow{AB}$ et on applique le théorème de superposition, on somme donc les contributions de chaque H^+ et on obtient :

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{2e \cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \vec{e}_z.}$$

A13. On calcule $W' = -\vec{p}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_0/2 = -\varepsilon_0 \alpha_{pol} \mathcal{E}_0^2/2 = -\frac{4e^2 R^3 \cos^2(\theta)}{8\pi\varepsilon_0 L^4}$ et on remplace dans W_{tot} avec les résultats de A4, pour obtenir :

$$W_{tot} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 L} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} - 8 - \frac{4R^3 \cos^2(\theta)}{L^3} \right),$$

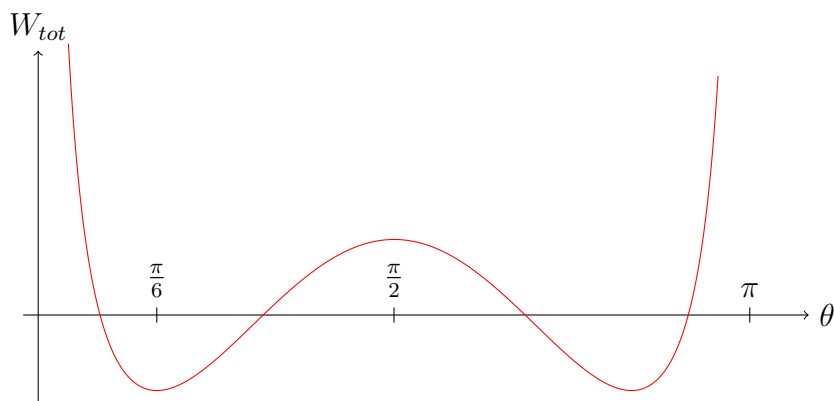
d'où les identifications : $A_1 = -8, A_2 = 1, A_3 = -4R^3/L^3$.

A14. On obtient les positions d'équilibre en résolvant : $\frac{dW_{tot}}{d\theta} = 0$. Le calcul donne :

$$\frac{dW_{tot}}{d\theta} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 L} \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \frac{8R^3 \sin(\theta) \cos(\theta)}{L^3} \right),$$

c'est nul si $\cos(\theta) = 0$ ou si $8\frac{R^3}{L^3} \sin^3(\theta) = 1$. Donc $\theta = \pi/2$, comme en **A6**, ou $\sin(\theta) = \frac{L}{2R}$. Ici on a $R \simeq L$ donc on obtient $\theta = \pi/6$.

A15. On trace en prenant $A_1 = 0$ ce qui ne fait que translater la courbe vers le haut, sans conséquences pour la discussion de la stabilité :



On constate donc que la position $\theta = \frac{\pi}{2}$ est instable et que la position $\theta = \frac{\pi}{6}$ est stable.

A16. On obtient pour 2θ la valeur de 60° ce qui n'est pas encore satisfaisant par rapport à la valeur de 104.5° donnée par la méthode VSEPR.

B1. Comme l'oxygène est plus électronégatif que l'hydrogène, les électrons de la liaison $O-H$ sont en moyenne plus attirés vers l'oxygène. Cela crée une charge partielle négative sur l'oxygène et des charges partielles positives sur les hydrogènes. Le barycentre des charges négatives est donc sur l'oxygène et celui des charges positives est au centre du segment joignant les deux hydrogènes. Les deux barycentres étant disjoints, un moment dipolaire apparaît, la molécule d'eau est donc polaire.

Avec l'angle donné, la distance entre les deux barycentres vaut $L\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc le moment dipolaire vaut $p = eL\sqrt{2}$, numériquement $p = 2.3 * 10^{-29} C.m$ ou $p = 6.8D$, à comparer avec la valeur expérimentale de $1.85D$.

On a donc surévalué le moment dipolaire : d'une part on a surévalué les charges en supposant la molécule constituée d'ions et aussi la distance entre les barycentres en prenant $2\theta = 90^\circ$ au lieu de 104.5° .

B2. Le vecteur polarisation correspond à la densité de dipôles électriques. Il s'exprime en $C.m^{-2}$.

Chaque molécule a un moment dipolaire non nul mais comme la direction et le sens de ce moment sont aléatoires en l'absence de champ électrique extérieur (isotropie), la polarisation est nulle.

B3. On sait que l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur $\vec{E}$ vaut $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Les positions d'équilibre sont donc $\vec{p}$ et $\vec{E}$ alignés, position stable et $\vec{p}$ et $\vec{E}$ antialignés, position instable.

B4. Si le champ oscille, il va entraîner l'oscillation du dipôle.

Si on augmente ω , le dipôle oscillera de plus en plus vite, ce qui correspond à une augmentation de l'énergie cinétique et donc de la température en s'appuyant sur la description cinétique de

cette dernière.

Remarque : un raisonnement sur les dipôles oscillants pourrait perturber, ω correspond aussi à la pulsation du rayonnement du dipôle. Il y a une conséquence thermique quand ω est dans le domaine des infrarouges mais si ω croît à partir de là, il n'y a plus de lien avec la chaleur.

B5. χ_0 est ici la susceptibilité électrique en régime permanent.

Si $\vec{E} = \vec{0}$, on a $\tau \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{P} = \vec{0}$ d'où $\vec{P}(t) = \vec{P}(t=0) \exp(-t/\tau)$. τ est donc le temps caractéristique nécessaire pour que le milieu retrouve l'isotropie quand on annule le champ extérieur.

B6. On part de $\tau \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \vec{E}$ et on passe en complexe : $(j\omega\tau + 1)\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \chi_0 \underline{\vec{E}}$ et on identifie avec la définition de la susceptibilité électrique pour un DLHI $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi(\omega)} \underline{\vec{E}}$ pour obtenir :

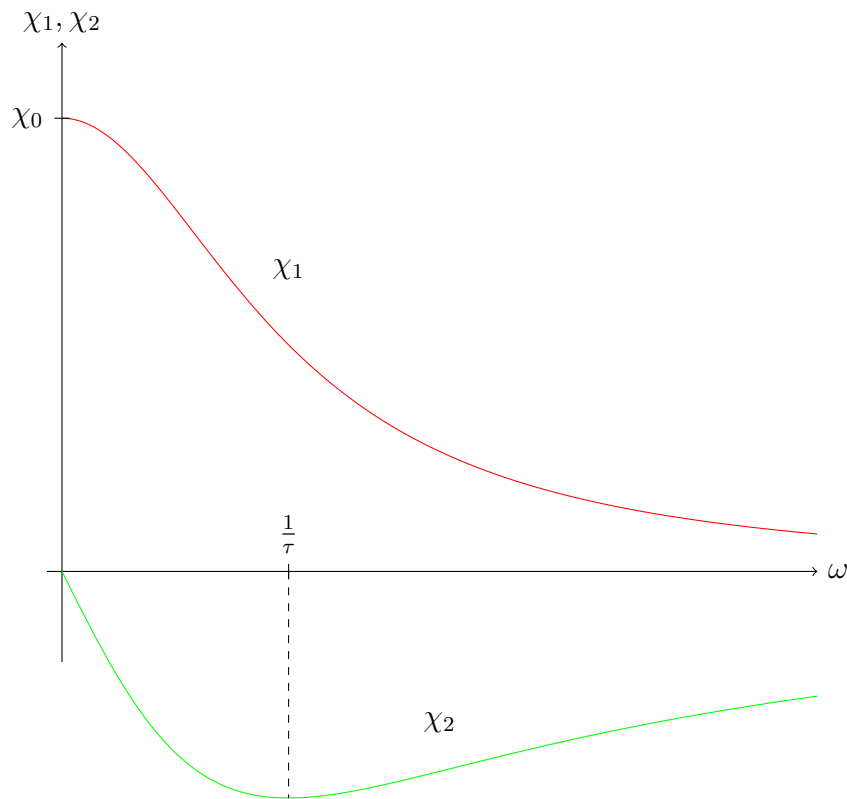
$$\underline{\chi(\omega)} = \frac{\chi_0}{1 + j\omega\tau}.$$

On décompose ensuite en partie réelle et imaginaire en multipliant par le complexe conjugué :

$$\underline{\chi(\omega)} = \frac{\chi_0}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{j\omega\tau\chi_0}{1 + \omega^2\tau^2},$$

et on identifie $\boxed{\beta = -1}$.

B7.



A basse pulsation $\underline{\chi(\omega)}$ tend vers χ_0 réel. A haute pulsation $\underline{\chi(\omega)}$ tend vers 0. χ_2 présente un minimum pour $\omega = \frac{1}{\tau}$.

B8. Equation de conservation :

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_l) = 0.$$

Comme $\vec{j}_l = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, on a

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \text{div}(\vec{P})}{\partial t} = 0,$$

d'où $\rho_l + \text{div}(\vec{P}) = \text{cst}$. En prenant la constante nulle, on a $\rho_l = -\text{div}(\vec{P})$ donc $\boxed{K = -1}$.
 $\vec{j}_l$ est en $A.m^{-2}$.

B9. On a $\text{div}(\vec{E}) = \rho_l/\varepsilon_0$ qui devient en complexe et en remplaçant ρ_l :

$$\boxed{\text{div}(\vec{E} + \vec{P}/\varepsilon_0) = \text{div}((1 + \chi(\omega))\vec{E}) = 0.}$$

On a immédiatement : $\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ et $\boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0}$.

$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial (\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$, donc :

$$\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

B10. En partant de $\text{div}((1 + \chi(\omega))\vec{E}) = 0$, on suppose $\chi(\omega) \neq -1$ ainsi $\text{div}(\vec{E}) = 0$ ce qui donne vu la forme du champ : $-jk\vec{e}_x \cdot \vec{E} = 0$. Donc $\vec{E}$ est transverse, $\vec{u} \cdot \vec{e}_x = 0$.

B11. On calcule $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E}))$ de deux façons. En utilisant la formule d'analyse vectorielle : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$. On utilise ensuite l'équation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, finalement :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

B12. On remplace $\vec{E}$ par la forme de l'énoncé, le laplacien vectoriel en cartésien étant le laplacien scalaire appliqué à chaque composante, pour obtenir :

$$\boxed{k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \omega^2 = \frac{(1 + \chi(\omega))}{c^2} \omega^2.$$

B13. Question que j'ai trouvée délicate car les hypothèses $\chi_0 \gg 1$ et $\omega\tau \ll 1$ ne suffisent pas à clarifier complètement le développement limité. J'ai supposé ici que χ_0 et $\frac{1}{\omega\tau}$ sont du même ordre en posant $\chi_0 = a/\varepsilon$ et $j\omega\tau = jb\varepsilon$ avec a, b d'ordre 0 et en faisant un DL pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Néanmoins si on n'a pas les mêmes ordres, si par exemple on a $\chi_0 = a/\varepsilon^2$ et $j\omega\tau = jb\varepsilon$, le résultat sera différent.

$$\begin{aligned} r_1 + jr_2 &= \sqrt{1 + \frac{\chi_0}{1 + j\omega\tau}} = \sqrt{\frac{1 + \chi_0 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}} = \sqrt{\frac{1 + a/\varepsilon + jb\varepsilon}{1 + jb\varepsilon}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon/a + jb\varepsilon^2/a}{1 + jb\varepsilon}} \simeq \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \frac{1 + \varepsilon/(2a) + jb\varepsilon^2/(2a)}{1 + jb\varepsilon/2} \\ &= \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \frac{(1 + \varepsilon/(2a) + jb\varepsilon^2/(2a))(1 - jb\varepsilon/2)}{1 + b^2\varepsilon^2/4} \\ &\simeq \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} (1 + \varepsilon/(2a) - jb\varepsilon/2) \\ &= \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{2\sqrt{\chi_0}} - \frac{j\omega\tau\sqrt{\chi_0}}{2}. \end{aligned}$$

On a choisi le signe + devant la racine, la question demande juste de trouver des nombres réels sans exhaustivité. On obtient :

$$\boxed{r_1 = \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{2\sqrt{\chi_0}}, r_2 = -\frac{\omega\tau\sqrt{\chi_0}}{2}.$$

Peut-être que l'énoncé attend qu'on ne laisse que le premier ordre non nul séparément dans la partie réelle et imaginaire auquel cas on aurait : $r_1 \simeq \sqrt{\chi_0}$.

B14. On part de l'équation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{(1+\chi(\omega))}{c^2} \omega^2 = \frac{(r_1+jr_2)^2}{c^2} \omega^2$ d'où on déduit $\underline{k} = \pm \frac{(r_1+jr_2)}{c} \omega$. En prenant le signe + on conclut $k_1 = \frac{r_1}{c} \omega, k_2 = \frac{r_2}{c} \omega$ soit :

$$k_1 = (\sqrt{\chi_0} + \frac{1}{2\sqrt{\chi_0}}) \frac{\omega}{c}, k_2 = -\frac{\omega^2 \tau \sqrt{\chi_0}}{2c}.$$

B15. En complexe $\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x)) \vec{e}_y = E_0 \exp(j(\omega t - k_1 x - j k_2 x)) \vec{e}_y = E_0 \exp(k_2 x) \exp(j(\omega t - k_1 x)) \vec{e}_y$. Cela donne donc un champ réel : $\vec{E} = E_0 \exp(k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x) \vec{e}_y$.

L'onde est plane car elle ne dépend que de la coordonnée spatiale x . Elle n'est ni progressive (pas sous la forme $f(x - ct)$) ni stationnaire (pas de la forme $f(x)g(t)$). Elle a une polarisation rectiligne selon Oy car $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_y \forall t$.

B16. On a $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_1}.$$

L'amplitude s'écrit $E_0 \exp(k_2 x) = E_0 \exp(-|k_2| x)$, on identifie $\delta = 1/|k_2|$. Le milieu est absorbant donc l'amplitude de l'onde décroît, c'est le cas quand $\chi_2 < 0$. δ est la longueur caractéristique de décroissance de l'amplitude.

B17. On obtient $\omega\tau = 1.5 * 10^{-2}, \lambda = 1.4 * 10^{-2} m = 1.4 cm, \delta = 2.9 * 10^{-1} m = 29 cm$.

L'hypothèse $\omega\tau \ll 1$ est à peu près acceptable. L'onde est centimétrique. δ donne l'ordre de grandeur de la taille maximum d'un aliment qu'on peut mettre dans un micro-onde pour que les ondes pénètrent jusqu'en son centre.

B18. La direction du vecteur de Poynting moyen est celle de propagation $+\vec{e}_x$, c'est le cas en général sauf dans certains milieux "inusuels" (biréfringents ou main gauche). Comme le vecteur de Poynting est proportionnel au carré du champ électrique, on aura un terme $\exp(-2x/\delta)$. Le cosinus disparaît dans la moyenne temporelle.