

DS 5 - Problème 1

1. 1161 K est la température de fusion de PbO, donc selon que T est > ou < à cette valeur le PbO obtenu n'est pas dans le même état, ce qui modifie $\Delta_{\text{m}}H^\circ$ et $\Delta_{\text{m}}S^\circ$.

Pour $\text{PbS(s)} + \frac{3}{2} \text{O}_2(\text{g}) = \text{PbO(l)} + \text{SO}_2(\text{g})$, on obtient :

$$\Delta_{\text{m}}H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{PbO(l)}) + \Delta_f H^\circ(\text{SO}_2(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{PbS(s)})$$

$$\Delta_{\text{m}}S^\circ = S^\circ(\text{PbO(l)}) + S^\circ(\text{SO}_2(\text{g})) - S^\circ(\text{PbS(s)}) - \frac{3}{2} S^\circ(\text{O}_2(\text{g}))$$

De plus, il faut tenir compte du changement d'état, ainsi pour



$$\Delta_{\text{m}}H^\circ = \Delta_{\text{fus}}H^\circ(\text{PbO})$$

exprimé précédemment

$$\underline{\text{A.N : } \Delta_{\text{m}}H^\circ = -384 \text{ kJ/mol}}$$

$$\text{et } \Delta_{\text{m}}S^\circ = \Delta_{\text{fus}}S^\circ + \frac{\Delta_{\text{fus}}H^\circ(\text{PbO})}{T_{\text{fus}}(\text{PbO})}$$

$$\underline{\text{A.N : } \Delta_{\text{m}}S^\circ = -74,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

2. $\Delta_{\text{m}}H^\circ < 0$: réaction exothermique

$\Delta_{\text{m}}S^\circ < 0$ est cohérent avec une diminution de la quantité de gaz associée

si la réaction ($\Delta V_{\text{gas}} = -\frac{1}{2} < 0$)

3. $T \uparrow \Rightarrow$ évolution sens endothermique (loi de modération de Van't Hoff)
donc évolution dans le sens indirect

4. $\Delta_{\text{m}}G^\circ = \Delta_{\text{m}}H^\circ - T \Delta_{\text{m}}S^\circ$ (variable entre 1161 K et 1387 K, car après PbS passe à l'état liquide)

5. $k^\circ = 10^{-\frac{\Delta_{\text{m}}G^\circ}{RT}}$ A.N : $k^\circ = 7,5 \cdot 10^{11}$ réaction totale ...

6. Pour PbS (solide) et PbO (liquide, seul dans sa phase) les activités sont égales à 1.

$$\text{Donc } Q = \frac{(P_{\text{SO}_2}/P^\circ)}{(P_{\text{O}_2}/P^\circ)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(\frac{n^1 P}{N P^\circ}\right)}{\left(\frac{n P}{N P^\circ}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n^1}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{P}{P^\circ}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ donc } Q = \frac{n^1}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{P}{P^\circ}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

7. $\Delta V_{\text{gas}} < 0$ donc $P \uparrow$ entraîne une évolution dans le sens direct (loi de modération de Le Chatelier)

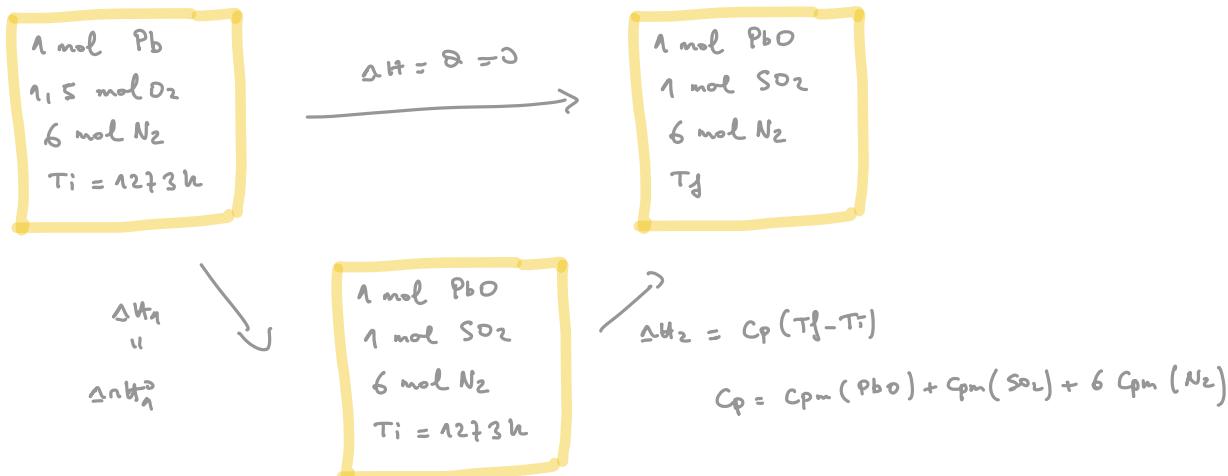
8. Toutes choses égales par ailleurs, un ajout de gaz n'agit à

T et P fixes fait évoluer en sens inverse d'une \uparrow de P , donc ici dans le sens indirect.
Donc, comparé à Dr pur, l'utilisation d'un défavorise la réaction.

On peut penser que ce n'est pas trop gênant, et il est + simple d'utiliser le

d'oxygène contenu dans l'air que du O_2 pur ...

g. c'est un classique calcul de température de flamme :



$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \text{ et } \Delta H = 0 \text{ donc } \Delta H_1^\circ + C_p (T_f - T_i) \Rightarrow T_f = T_i - \frac{\Delta H_1^\circ}{C_p}$$

A.N : $T_f = 2747\text{ K}$

ce n'est pas favorable à la synthèse
puisque $T \uparrow \Rightarrow$ évolution sens inverse,
il faut chercher à réduire cette température
(mais les températures de flamme sont surestimées)

$$n_o. \quad k_i = k_0 e^{-\frac{\Delta G_i^\circ}{RT}}$$

A.N : $k_2^\circ = 2 \cdot 10^8$ réaction totale ...

problème 2

Partie A / Étude des bobines utilisées

A1. L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit $\text{div } \vec{B} = 0$; celle de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Dans le cadre de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

A2. Soit un contour fermé orienté \mathcal{L} . Par le théorème de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où S est une surface s'appuyant sur \mathcal{L} . Avec $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$.

A3. L'approximation du solénoïde infini est valable si $\ell \gg a$.

A4. Symétries : $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants. $\vec{B}(M)$, devant être perpendiculaire à ce plan, est porté par \vec{u}_z .

Invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z , et par rotation selon θ : B ne dépend donc que de r . Finalement, $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$.

A5. Soit un contour d'Ampère rectangulaire ABCD (côté AB confondu avec l'axe Oz), de longueur b et largeur c , entièrement contenu dans le solénoïde. \vec{B} étant selon \vec{u}_z en tout point,

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = [B(0) - B(c)]b$$

Ce contour n'enlace aucun courant. Par le théorème d'Ampère, il vient $B(0) = B(c), \forall c < a : \vec{B}(M)$ est **uniforme** dans le solénoïde.

Pour un contour rectangulaire ABCD (côté AB confondu avec Oz) de longueur b et largeur $c > a$,

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}} b$$

car le champ magnétique est supposé nul à l'extérieur du solénoïde. Le courant enlacé par ce contour valant $I_{\text{enlacé}} = N(b/\ell)i(t)$, il vient, d'après le théorème d'Ampère,

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{\ell} \vec{u}_z$$

A6. Tout plan passant par M et contenant \vec{u}_z est plan d'antisymétrie des courants, et donc plan de symétrie du champ magnétique. Ainsi, en tout point M de l'axe Oz, $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{u}_z .

A7. Le plan $z = 0$ est un **plan de symétrie des courants**, et donc un **plan d'antisymétrie du champ magnétique**. Cette propriété se traduit par $B_z(-z) = B_z(z), \forall z$.

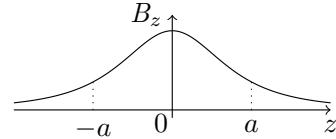
A8. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$ et vaut

$$B_{z,\max} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$$

Par définition de $z_{1/2}$, $B_z(z_{1/2}) = B_{z,\max}/2$. Il vient

$$\frac{a^2}{2(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4a}$$

$$2a^3 = (z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}$$



$$z_{1/2} = a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,77a$$

A9. Étudions la carte de champ du solénoïde.

- Le plan Π , passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,M) symétriques par rapport à Π , on remarque en effet que

$$\vec{B}(M) = \text{sym}_\Pi[\vec{B}(L)]$$

- Le plan Π^* , passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L,N) symétriques par rapport à Π^* , on note effectivement que

$$\vec{B}(N) = -\text{sym}_{\Pi^*}[\vec{B}(L)]$$

On retrouve les mêmes éléments de symétrie sur la carte de champ de la bobine plate.

A10. Les lignes de champ se resserrent aux endroits où le **champ magnétique est plus intense**. Elles sont parallèles aux endroits où le **champ magnétique est uniforme**. Ces propriétés viennent de l'équation locale $\text{div } \vec{B} = 0$: le **champ magnétique est à flux conservatif**.

Partie B / Transfert de puissance : rendement de Yates

B1. Par définition,

$$P_{\text{reçue}} = (u_{R_1} + u_{L_1})i = R_1 i^2 + L_1 i \frac{di}{dt}$$

L'intensité varie en $\cos(\omega t)$; en utilisant les résultats usuels

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right\rangle = 0$$

$$\langle P_{\text{reçue}} \rangle = \frac{R_1 I_0^2}{2}$$

- B2.** On utilise l'expression du champ magnétique donnée par l'énoncé, en $z = d$, supposé uniforme au niveau de la bobine réceptrice :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} N_2 S_2 = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 i(t) a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

- B3.** Il s'agit du phénomène d'**induction électromagnétique**, découlant de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- B4.** On calcule la fem en utilisant la **loi de Faraday** :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t)$$

- B5.** L'inductance propre de la bobine réceptrice étant négligée, cette dernière est parcourue par un courant $i_2 = e/R_2$. De fait,

$$P_{\text{géné}} = e i_2 = \frac{e^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t) \right]^2$$

Puisque $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$,

$$\langle P_{\text{géné}} \rangle = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \right]^2$$

- B6.** En utilisant les résultats précédents,

$$\eta = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \right]^2 \frac{2}{R_1 I_0^2}$$

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3} \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

Partie C / Modélisation du couplage : inductance mutuelle

- C1.** Le flux magnétique créé par un circuit 1, parcouru par un courant i_1 , à travers un circuit 2, s'écrit

$$\Phi_{12} = M i_1 \quad (\text{ou } \Phi_{21} = M i_2)$$

M est en **Henry**.

- C2.** La loi des mailles dans le circuit 1 s'exprime

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

De même, la loi des mailles dans le circuit 2 s'exprime

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

C3. On multiplie la première loi des mailles par i_1 , la seconde par i_2 :

$$Ei_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

En sommant ces deux équations, on obtient

$$Ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Ce bilan montre que la puissance fournie par le générateur, Ei_1 , est en partie **dissipée par effet Joule dans les résistances**, en partie **stockée sous forme magnétique dans les bobines**.

C4. En reprenant l'expression de \mathcal{E}_{mag} ,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 \left[L_1 \left(\frac{i_1}{i_2} \right)^2 + L_2 + 2M \left(\frac{i_1}{i_2} \right) \right]$$

Avec $x = i_1/i_2$,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x) \quad \text{avec} \quad P(x) = L_1 x^2 + 2Mx + L_2$$

C5. Puisque $\mathcal{E}_{\text{mag}} \geq 0$, $P(x) \geq 0$. Graphiquement, la fonction $x \rightarrow P(x)$ est une parabole tournée vers le haut. Pour assurer que cette fonction soit positive pour tout x , il faut que le discriminant de $P(x)$ soit négatif ou nul :

$$\Delta = (2M)^2 - 4L_1 L_2 \leq 0$$

Il vient $M \leq \sqrt{L_1 L_2} = M_{\text{max}}$.

C6. On peut par exemple citer :

- les transformateurs, permettant d'élever ou d'abaisser la tension dans les lignes électriques ;
- les moteurs électriques, comportant un circuit primaire fixe et un circuit secondaire mobile ;
- les alternateurs, fonctionnant dans le sens contraire des moteurs ;
- le chauffage par induction (four, plaque) ;
- la détection à boucle inductive (déTECTEUR de métaux, de véhicules) ;
- la transmission d'informations par radio-identification (RFID), mise en œuvre par exemple dans les portiques de sécurité...

Problème 3

1. C'est un temps ...

$$f = \frac{m}{\tau} v \Rightarrow \tau = \frac{mv}{f} \xrightarrow{\text{kg}} m \cdot s^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{kg} \cdot \text{n} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$2. m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}. \text{ En RS, } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{\tau e}{m} \vec{E}$$

$$3. \vec{j}_{ee} = ne(-e)\vec{v} \Rightarrow \vec{j}_{ee} = \frac{ne e^2 \tau}{m} \vec{E}. \text{ La conductivité est définie par } \vec{j}_{el} = \gamma \vec{E}$$

D'où

$$\gamma = \frac{ne e^2 \tau}{m}$$

$$4. ne = \frac{d \text{ [ean. Na]}}{M_{Cu}} \xrightarrow{\text{kg} \cdot m^{-3}}$$

A.N : $ne = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

en cm^{-3} ça fait $8,4 \cdot 10^{22}$, donc quasiment 10^4 fois plus que pour le silicium.

$$5. R = \frac{\rho l}{S}$$

6. Il faut tracer $\ln(\rho)$ en fonction de $1/T$. On trouve

$$A = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}$$

$$B = 110 \text{ K}$$

7. On extrapole à partir de la relation précédente :

Pour le silicium à 300 K :

$$\rho = 4 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}$$

Le silicium est environ 300 fois plus résistif que le cuivre.

8. On enlève un électron à un atome neutre. Il en résulte une charge $+e$



P perd un électron $\rightarrow P^+$

B gagne un électron $\rightarrow B^-$

10. Doping Phosphore \rightarrow plus d'electrons libres

On départ, p trous et n électrons libres. On introduit Np (par unité de volume) atomes de phosphore \Rightarrow Np électrons supplémentaires (et Np ions \oplus).

L'électroneutralité donne :

$$\frac{p + N_p}{\text{charges}} = \frac{n}{\text{charges}}$$

$$\oplus \quad \ominus$$

$$\text{Or, } n_p = n_i^2, \text{ donc } \frac{n_i^2}{n} + N_p = n \Rightarrow n^2 - N_p n - n_i^2 = 0$$

$$\text{On garde la solution positive : } n = \frac{N_p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{N_p^2 + 4n_i^2}$$

Si $N_p \gg n_i$: $n \approx N_p$ et alors $p = \frac{n_i^2}{N_p}$

on voit que les i libres proviennent majoritairement du dopage.

Et $p \ll n$.

11. De même, $p \approx N_B$ et $n = \frac{n_i^2}{N_B}$

Les trous proviennent majoritairement du dopage.

12. On n'ajoute pas de charges en dopant, donc l'ensemble de la zone de fonction

reste électriquement neutre. D'où $\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2 = 0$

13. $\operatorname{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$

Les symétries et invariances indiquent que $\vec{E} = E_n(x) \hat{e}_n$.

D'où $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_n}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial x} = \rho/\epsilon_0$

• $x \leq -l_1$ et $x > l_2$: $\rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_n = c^{\frac{x}{\epsilon_0}}$

et on démontre que le champ est nul dans ces zones.

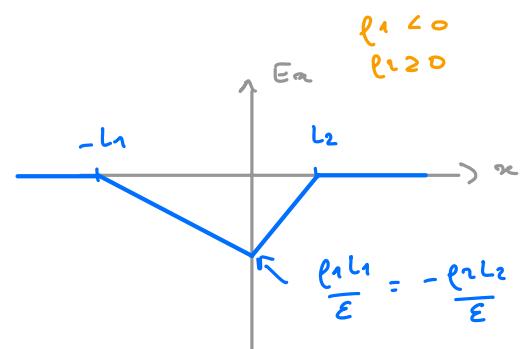
• $-l_1 \leq x \leq 0$: $\rho = \rho_1 \Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial x} = \frac{\rho_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\rho_1 x}{\epsilon_0} + c^{\frac{x}{\epsilon_0}}$
et $E_n(x = -l_1) = 0 \Rightarrow -\frac{l_1 \rho_1}{\epsilon_0} + c^{\frac{-l_1}{\epsilon_0}} = 0 \Rightarrow c^{\frac{-l_1}{\epsilon_0}} = \frac{l_1 \rho_1}{\epsilon_0}$

D'où $E_n = \frac{\rho_1}{\epsilon_0} (x + l_1)$

• $0 \leq x \leq l_2$: $\rho = \rho_2 \Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial x} = \frac{\rho_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\rho_2 x}{\epsilon_0} + c^{\frac{x}{\epsilon_0}}$
et $E_n(x = l_2) = 0 \Rightarrow \frac{l_2 \rho_2}{\epsilon_0} + c^{\frac{l_2}{\epsilon_0}} = 0 \Rightarrow c^{\frac{l_2}{\epsilon_0}} = -\frac{l_2 \rho_2}{\epsilon_0}$

D'où $E_n = \frac{\rho_2}{\epsilon_0} (x - l_2)$

Conclusion : $\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x \leq -l_1 \text{ ou } x \geq l_2 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0} (x + l_1) \hat{e}_n & \text{si } -l_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_2}{\epsilon_0} (x - l_2) \hat{e}_n & \text{si } 0 \leq x \leq l_2 \end{cases}$



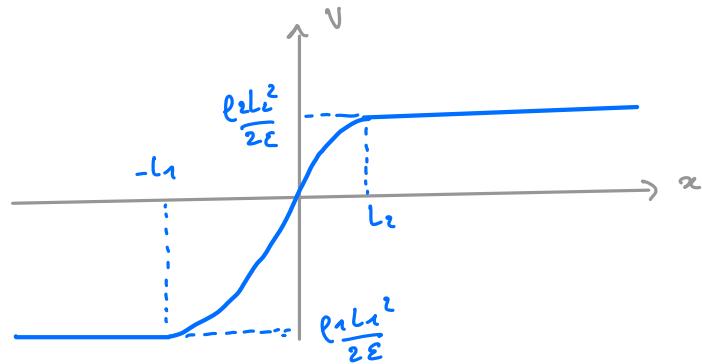
$$14. \vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) \Rightarrow E_n = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{et on choisit } V(x=0) = 0.$$

D'où $V =$

$$\begin{cases} \frac{\ell_1}{\varepsilon} \left(x^2/2 + L_1 x \right) & \text{si } -L_1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\ell_1 L_1^2}{2\varepsilon} & \text{si } x < -L_1 \\ \frac{\ell_2}{\varepsilon} \left(x^2/2 - L_2 x \right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_2 \\ \frac{\ell_2 L_2^2}{2\varepsilon} & \text{si } x > L_2 \end{cases}$$

$$\frac{\ell_1}{\varepsilon} \left(L_1^2/2 - L_1^2 \right) + c^{\frac{\ell_1}{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow c^{\frac{\ell_1}{\varepsilon}} = \frac{\ell_1 L_1^2}{2\varepsilon}$$

$$\frac{\ell_2}{\varepsilon} \left(L_2^2/2 - L_2^2 \right) + c^{\frac{\ell_2}{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow c^{\frac{\ell_2}{\varepsilon}} = \frac{\ell_2 L_2^2}{2\varepsilon}$$



$$15. V_0 = V(L_2) - V(-L_1) = \frac{\ell_2 L_2^2}{2\varepsilon} - \frac{\ell_1 L_1^2}{2\varepsilon} = \frac{\ell_2 L_2^2}{2\varepsilon} - \left(-\frac{\ell_1 L_1^2}{2\varepsilon} \right) \frac{L_1^2}{2\varepsilon} = \frac{\ell_2 L_2}{2\varepsilon} (L_1 + L_2)$$

$$q_1 L_1 + q_2 L_2 = 0$$

$V_0 = \frac{\ell_2 L_2}{2\varepsilon} (L_1 + L_2)$

16. Pour $0 \leq x \leq L_2$, la zone est dopée au phosphore, et les atomes P s'ionisent

en P^+ , libérant un électron qui migre vers la zone $-L_1 \leq x \leq 0$.
Donc il en résulte une charge $+e$ par atome de phosphore, et comme il y en a N_2 par μ de volume, alors $\ell_2 = N_2 e$

De la même manière, $\ell_1 = -N_1 e$

17. $N_1 \gg N_2$, alors $L_1 \ll L_2$.

D'où $V_0 \approx \frac{\ell_2 L_2^2}{2\varepsilon}$ et $\ell_2 = N_2 e \Rightarrow$

$$L_2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{N_2 e}}$$

A.N : $L_2 \approx 0,57 \mu\text{m}$

La largeur de la jonction est $L_1 + L_2$, donc environ L_2 .