CORRIGÉ « LASER PLASMA À HAUT ÉCLAIREMENT »

I. — GÉNÉRATION D'HARMONIQUES DANS LES GAZ

A. — Champ laser et champ coulombien

❑ **1** – La force électrique coulombienne exercée par le proton sur l'électron est $\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}}$. C'est une force centrale, de centre le proton, qui dérive de W_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, W_p = -\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$, ce qui conduit à $\boxed{W_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ (origine à l'infini).

❑ **2** – L'énergie mécanique est $W_m = W_c + W_p$, avec $W_c = \frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de l'électron. Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel du proton, en projection sur $\vec{u}_r$, s'écrit : $-m\frac{v^2}{r} = --\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, ce qui conduit à $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}}$. On en déduit : $\boxed{W_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} < 0}$ (état lié).

La quantification proposée pour le moment cinétique (modèle de Bohr) s'écrit $mrv = n\hbar$, ce qui donne via l'expression de v :

$$\boxed{r = n^2 \underbrace{\frac{\varepsilon_0 h^2}{m\pi e^2}}_{a_0}}$$

Dans l'état fondamental $\boxed{n=1}$ et $-W_0(\text{eV}) = -\frac{e}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{me^3}{8(\varepsilon_0 h)^2}$. On obtient $\boxed{-W_0 \approx -10\text{ eV}}$, cohérent avec la valeur « attendue » de $-13,6$ eV pour l'atome d'hydrogène.

❑ **3** – Le champ électrique ressenti par l'électron est celui créé par le proton, ce qui donne $\boxed{E_c = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} \approx 5\times 10^{11}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$ dans l'état fondamental.

D'après le document 1 l'énergie totale de l'impulsion laser W_T est délivrée pendant une durée T, ce qui donne la puissance $\boxed{P = \frac{W_T}{T} = 20\text{ GW}}$ (valeurs pour un gaz).

- **Avant la lentille** le faisceau a un diamètre D, donc l'éclairement I (uniforme) est tel que $P = \pi\frac{D^2}{4}I$. D'après l'expression liant I au champ, on en déduit l'amplitude du champ électrique avant la lentille :

$$\boxed{E_\ell = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{8P}{\varepsilon_0 c\pi D^2}} \approx 4\times 10^8\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$$

- **Au foyer** le faisceau a un rayon R_0 (waist), que l'on obtient via la figure 1.c et la relation fournie $\tan\alpha = \frac{D}{f'} \approx \frac{\lambda_0}{\pi R_0}$, soit $R_0 \approx \frac{\lambda_0 f'}{\pi D}$. Ensuite on procède comme précédemment, ce qui donne :

$$\boxed{E_f = \sqrt{\frac{8P}{\varepsilon_0 c\pi R_0^2}} = \sqrt{\frac{8\pi P D^2}{\varepsilon_0 c\lambda_0^2 f'^2}} \approx 2\times 10^{11}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$$

Ce champ est du même ordre de grandeur que celui ressenti par l'électron : le faisceau va pouvoir ioniser la matière de la cible, ce qui n'était pas possible avant la focalisation.

A. — Un mécanisme en trois étapes

❑ **4** – On travaille à l'échelle de l'atome donc $|z| \approx a_0$, ce qui donne $\boxed{|k_0 z| \approx \frac{2\pi a_0}{\lambda_0} \approx 4\times 10^{-4} \ll 2\pi}$: on peut donc négliger le terme en $k_0 z$.

❑ **5** – L'énergie potentielle d'interaction est celle de la question 1 avec $r = |x|$: $W_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}$ ce qui correspond bien aux courbes de la figure II.a (allure d'hyperboles).

❑ **6** – La force de Lorentz est $\boxed{\overrightarrow{F} = -e\left(\overrightarrow{E}(z,t) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}(z,t)\right)}$. Par ailleurs la relation de structure d'une OPPH se propageant selon z croissant dans le vide est $\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}}{c}}$.

Cette force dérive d'une énergie potentielle si on peut négliger la contribution magnétique devant la contribution électrique, ce qui est le cas pour $\frac{vB}{E} \ll 1$; la relation de structure donne alors (onde transverse donc $B = E/c$) la condition $v \ll c$, c'est-à-dire qu'il faut des $\boxed{\text{électrons non relativistes}}$. Dans ce cas, la force peut s'écrire $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, W_{p,\text{las}}$ avec $\boxed{W_{p,\text{las}} = eE_f\, x\cos(\omega_0 t)}$ (on peut choisir la constante nulle en $x = 0$), et donc :

$$\boxed{W_{p,\text{tot}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|} + eE_f\, x\cos(\omega_0 t)}$$

Dans le figure II.b le champ est dirigé dans le $\boxed{\text{sens des } x \text{ décroissants}}$ pour que l'électron aille vers la droite. La courbe en pointillés correspond manifestement à $W_{p,\text{las}}$ (cosinus négatif ici).

❑ **7** – Le franchissement de la barrière est facilité quand $|\cos(\omega_0 t)| = 1$, c'est-à-dire quand l'action du champ électrique de l'onde est la plus importante, donc :

- au début du cycle ($t = nT_0$), l'électron est alors extrait par les $x < 0$ puisque le champ est dirigé vers la droite ;
- au bout d'une demi-période, l'électron est alors extrait par les $x > 0$ puisque le champ est dirigé vers la gauche.

On peut déterminer $\tilde{x}_0$ pour le cas $x > 0$: cela correspond au x tel que $\frac{\mathrm{d}W_{p,\text{tot}}}{\mathrm{d}x} = 0$, ce qui conduit à $x^2 = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 E_f\cos(\omega_0 t)}$, qui n'a de solution que si $\cos(\omega_0 t) < 0$, ce qui est bien le cas au bout d'une demi-période puisque $\cos(\omega_0 t) = -1$. Le raisonnement est identique pour les $x < 0$.

On en déduit donc $\boxed{\tilde{x}_0 = \pm\sqrt{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 E_f}}}$.

On veut $W_{p,\text{tot}}(\tilde{x}_0) = -W_0$, ce qui conduit après calculs à (on se place pour $x > 0$ et aux instants tels que $\cos(\omega_0 t) = -1$) : $\boxed{E_{f,i} = \frac{\pi\varepsilon_0 W_0^2}{e^3} \approx 3\times10^{10}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$: $\boxed{\text{le gaz est bien ionisé}}$ (cf. valeur de E_f).

❑ **8** – L'électron n'est soumis qu'au champ électrique du laser, le PFD s'écrit donc selon $\overrightarrow{u}_x$: $\boxed{m\ddot{x} = -eE_f\cos(\omega_0 t)}$. On en déduit la vitesse et la position compte tenu des conditions initiales $x(t_i) = 0$ et $v(t_i) = 0$:

$$\dot{x}(t) = \frac{eE_f}{m\omega_0}\left(\sin(\omega_0 t_i) - \sin(\omega_0 t)\right)$$

$$x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_0^2}\left[(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t_i)) + \omega_0(t - t_i)\sin(\omega_0 t_i)\right]$$

Comme l'ionisation a lieu à un instant t_i tel que $|\cos(\omega_0 t_i)| = 1$, et donc $\sin(\omega_0 t_i) = 0$, on en déduit finalement :

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\frac{eE_f}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_0^2}\left[(\cos(\omega_0 t) - 1)\right]}$$

REMARQUE

L'énoncé n'est pas très clair sur le fait que t_i correspond à un des instants privilégiés déterminés à la question précédente.

Pour que x_0 soit bien négligeable lors de l'étude du mouvement de l'électron dans le champ laser, le déplacement de l'électron pendant $T_0/2$ doit être très grande devant x_0.

❑ **9** – D'après l'expression précédente de la vitesse, on en déduit l'expression de l'énergie cinétique : $\boxed{W_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{e^2E_f^2}{2m\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t)}$.

En développant et en prenant la moyenne temporelle, on en déduit $\boxed{\langle W_c\rangle = \frac{e^2E_f^2}{4m\omega_0^2}}$.

La fréquence ν du photon émis est donnée par $h\nu = W_{c,\max} + W_0 \approx 2,0 \times 10^2$ eV. On en déduit l'étendue spectale $\Delta\nu = \nu$ (cf. énoncé), et donc l'ordre de grandeur de la durée de l'impulsion δt par $\delta t \cdot \Delta\nu \approx 1$, ce qui conduit à $\boxed{\delta t \approx 10^{-17}\ \mathrm{s}}$. Cette valeur est cohérente avec la durée des impulsions mentionnée dans l'introduction du sujet.

❑ **10** – Les phénomènes étudiés sont linéaires [1], on peut donc utiliser le principe de superposition : n'importe quel signal peut alors être obtenu par superposition de signaux harmoniques (Fourier).

Les signaux ont parcouru une distance x à la vitesse c, on ajoute donc le déphasage dû à cette propagation : $\boxed{s_+(x,t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]}$ et $\boxed{s_-(x,t) = -S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{T_0}{2} - \frac{x}{c}\right)\right]}$.

L'amplitude est maximale si les deux signaux sont en phase, donc si les deux cosinus sont en opposition de phase (du fait du signe moins devant le second) : le décalage temporel $\frac{T_0}{2}$ doit être un multiple demi-entier de la période T, soit : $\frac{T_0}{2} = \left(p + \frac{1}{2}\right) T$, avec $p \in \mathbb{N}$. On en déduit $\boxed{\omega = (2p+1)\omega_0,\ \text{avec}\ p \in \mathbb{N}}$.

REMARQUE

Cela se retrouve aussi par le calcul. Le signal résultant est :

$$\begin{aligned}
s(x,t) &= S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] - S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{T_0}{2} - \frac{x}{c}\right)\right] \\
&= -2S_0 \sin\left(\frac{\omega T_0}{4}\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{\omega T_0}{2}\right] \\
&= -2S_0 \sin\left(\pi \frac{\omega}{2\omega_0}\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{\omega T_0}{2}\right]
\end{aligned}$$

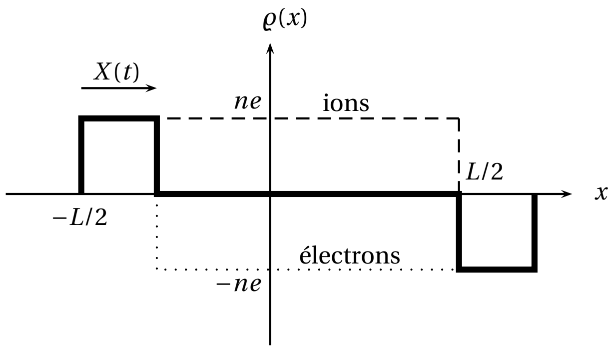
L'amplitude est maximale pour $\sin\left(\pi \frac{\omega}{2\omega_0}\right)$ maximal, ce qui redonne le même résultat. La première méthode est plus rapide et correspond probablement à ce qui était attendu !

Finalement, le spectre ne comporte que les harmoniques impaires $\omega = (2p+1)\omega_0$, et s'étend entre (on suppose une valeur minimale nulle pour W_c) $\nu_{\min} \approx \frac{W_0}{h} \approx 9\nu_0$ (le premier harmonique serait donc le numéro 9 ou 10) et 10^{17} Hz (cf. Q9) : le spectre est principalement situé dans le domaine UV et le début des rayons X, ce qui est cohérent avec l'introduction du sujet.

II. — GÉNÉRATION D'HARMONIQUES SUR UN MIROIR PLASMA

B. — Pulsation propre

❑ **11** – La distribution des ions est fixe et uniforme sur l'intervalle $\pm L/2$ et celle des des électrons aussi, mais décalée de $X(t)$. Dans les zones où $\varrho(x)$ n'est pas nulle, elle vaut ne en valeur absolue (cf. figure).



On cherche le champ électrique dans la zone de $\varrho = 0$. On est en présence de deux nappes planes d'épaisseur $X(t)$ et de densité volumique de signes opposés.

Pour commencer, considérons une nappe plane de densité volumique ϱ_0 entre $x = \pm X(t)/2$. Les invariances montrent que [2] le champ ne dépend que de x et les symétries qu'il est selon $\vec{u}_x$ et que la fonction

$E(x)$ est impaire. On écrit l'équation de Maxwell-Gauss en distinguant trois zones :

$$E(z) = \begin{cases} A & \text{si } x > X(t)/2 \\ \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}x + B & \text{si } x \in [-X/2; X/2] \\ C & \text{si } x < -X(t)/2 \end{cases}$$

Comme $E(x)$ est impaire $C = -A$ et $B = 0$. Comme le champ est continu pour une répartition volumique, on en déduit la constante. Ainsi :

$$E(z) = \begin{cases} \frac{\varrho_0 X(t)}{2\varepsilon_0} & \text{si } x > X/2 \\ \frac{\varrho_0 X(t)}{2\varepsilon_0} & \text{si } x \in [-X/2; X/2] \\ -\frac{\varrho_0 X(t)}{2\varepsilon_0} & \text{si } z < -X/2 \end{cases}$$

Dans la zone étudiée, le champ créé par la nappe de gauche ($\varrho_0 = ne$) est donc $\frac{neX(t)}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_x$, et celui créé par la nappe de droite ($\varrho_0 = -ne$) est $-\frac{-neX(t)}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_x$. Le champ résultant est donc $\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{neX(t)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_x}$.

REMARQUE
L'énoncé attendait-il une méthode plus rapide utilisant le champ créé par un plan infini, combiné avec un passage volumique-surfacique (hors programme) ?

Dans cette zone, le PFD appliqué à l'électron s'écrit $m\ddot{x}\overrightarrow{u}_x = -e\overrightarrow{E} = -\frac{ne^2X(t)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u}_x$, ce qui donne l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$.

B. — Propagation dans un plasma homogène

❑ **12** – On rappelle les équations de Maxwell dans le cas général, puis avec $\varrho = 0$ (milieu localement neutre). On applique le PFD à un électron en négligeant l'action du champ $\overrightarrow{B}$ (électrons non relativistes, voir Q6), ce qui donne pour le vecteur densité de courant électrique $\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E}$. on peut l'écrire en notation complexe $\underline{\overrightarrow{j}} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\gamma}\,\underline{\overrightarrow{E}}$, avec $\boxed{\underline{\gamma} = -i\frac{ne^2}{m\omega}}$ la conductivité complexe du plasma, qui est imaginaire pure.

REMARQUE
L'énoncé demande alors d'établir l'équation de propagation : quel est l'intérêt de passer par la conductivité complexe si c'est pour revenir en réels maintenant ?

Pour établir l'équation d'onde on calcule $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}$ de deux manières (via le formulaire et via les équations de Maxwell). On obtient après calculs :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\overrightarrow{E}}$$

On en déduit alors la relation de dispersion en passant en complexes (laplacien remplacé par $-k^2$, dérivée temporelle première par $i\omega$) : $-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}$ qui est bien la relation de l'énoncé. La propagation n'est possible que pour $\omega > \omega_p$ (k réel), ce qui conduit à $\boxed{n < \frac{m\varepsilon_0\omega^2}{e^2} = n_c}$. Si la propagation est impossible, l'onde est réfléchie.

❑ **13** – L'onde se réfléchit en x_c tel que $n_e(x_c) = n_c$. Comme $n_{\max} > n_c$ d'après le document 3, il existe un x tel que $n_e(x) = n_c$. À partir de l'expression de $n_e(x)$ on en déduit $\boxed{x_c = L\ln\frac{n_c}{n_{\max}}}$.

❑ **14** – D'après le document 3 la direction de la réflexion suit les lois de Descartes de l'optique géométrique, donc k_y se conserve. Comme $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, on en déduit via la relation de dispersion $k_x^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} - k_y^2$. La réflexion a lieu pour $k_x^2 < 0$ ce qui donne $\omega_p^2 > \omega^2 - c^2k_y^2$. Comme k_y se conserve, on peut l'écrire $k_y = k\sin\beta = \frac{\omega}{c}\sin\beta$ (on utilise son expression avant le plasma). Ainsi, après calculs on obtient $n < n_c\cos^2\beta$, ce qui donne l'abscisse demandée : $\boxed{x_r = L\ln\frac{n_c\cos^2\beta}{n_{\max}} = x_c + 2L\ln(\cos\beta) < x_c}$.

B. — Excitation d'onde plasma à la surface

❑ **15** – Les électrons passent à l'abscisse x à l'instant $\boxed{t_0(x) = \frac{x+3L}{v}}$.
La phase en (x,t) est telle que $\phi(x,t) = \phi(x,t_0(x)) + \omega_p(x)(t - t_0(x))$, ce qui donne $\phi(x,t) = \omega_p(x)\left(t - \frac{x+3L}{v}\right)$. On utilise ensuite l'expression de $\omega_p(x) = \sqrt{\frac{n_e(x)e^2}{m\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{n_{\max}e^2}{m\varepsilon_0}}\exp(x/2L)$, que l'on peut donc écrire $\omega_p(x) = \omega_{\max}\exp(x/2L)$. Finalement :

$$\boxed{\phi(x,t) = \omega_{\max}\,\mathrm{e}^{x/2L}\left(t - \frac{x+3L}{v}\right)}$$

❑ **16** – Calculons $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x$:

$$\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\omega_{\max}\,\mathrm{e}^{x/2L}\left(\frac{t}{L} - \frac{x}{Lv} - \frac{5}{v}\right)$$

L'instant d'émission en x est tel que $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = 0$, ce qui donne $t = \frac{x+5L}{v}$. Comme $x \in [-3L;0]$ et $v > 0$, on en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un instant } t > 0 \text{ tel qu'il y ait émission}}$. En revanche, si le paquet se propageait selon $x < 0$, ce qui revient à prendre $v < 0$, il n'y a pas de solution $t > 0$ et donc l'émission est impossible.

❑ **17** – Le décalage temporel est (onde plane) $\boxed{\frac{\vec{k}\cdot\overrightarrow{MM_0}}{\omega} = \frac{y\sin\beta}{c}}$.
À l'ordonnée y l'instant d'entrée des électrons dans la zone hétérogène est $\frac{y\sin\beta}{c}$; pour atteindre l'abscisse x, il leur faut un temps supplémentaire $\frac{x+3L}{v}$. On en déduit $\boxed{t_0(x,y) = \frac{y\sin\beta}{c} + \frac{x+3L}{v}}$. La phase est donc désormais donnée par :

$$\phi(x,y,t) = \omega_{\max}\,\mathrm{e}^{x/2L}\left(t - \frac{y\sin\beta}{c} - \frac{x+3L}{v}\right)$$

La condition d'émission $\vec{k}_p \cdot \vec{u}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$ conduit après calculs à :

$$\boxed{y = \frac{c}{v\sin\beta}(-x + vt - 5L)}$$

qui est bien, à t fixé, l'équation d'une droite dont la pente est constante et l'ordonnée à l'origine augmente « à la vitesse v » au cours du temps. L'émission semble s'effectuer le long d'un cône de sommet $M(x,y)$ et de demi-angle au sommet α tel que $\tan\alpha = \frac{v\sin\beta}{c}$. Cela ressemble à la formation d'un sillage (plutôt type cône de Mach puisque l'angle α dépend de v).
Les paquets d'électrons excitent des oscillations plasma à la fréquence plasma locale $\omega_p(x)$ qui varie de manière continue dans la zone hétérogène : $\boxed{\text{le spectre est continu et } \omega < \omega_{\max}}$.

III. — Interaction d'une impulsion avec une feuille mince

❑ **18** – Si la température du plasma est assez élevée l'énergie mécanique des particules sera principalement d'origine cinétique $\frac{3}{2}k_B\theta_e$ et les interactions directes entre particules négligeables, ce qui permet d'utiliser le modèle du gaz parfait…

❑ **19** – On écrit la conservation du nombre total de particules (pour une section transverse unité) :
- avant expansion : $n_{0,\max}\delta$;
- après expansion : $n_{L,\max}\delta + 2\int_{-\infty}^{0} n_{L,\max}\exp(x/L)\mathrm{d}x = n_{L,\max}(\delta + 2L)$.

On en déduit $\boxed{n_{L,\max} = n_{0,\max}\frac{\delta}{\delta+2L}}$. Comme la pulsation plasma est proportionnelle à $n^{1/2}$, on en déduit $\boxed{\omega_{L,\max} = \omega_{0,\max}\sqrt{\frac{\delta}{\delta+2L}}}$.

❑ **20** – D'après l'énoncé $\omega_{L,\max} \approx 18,7\omega_0\sqrt{\frac{\delta}{\delta+2L}}$. À partir de graphique IV.b, en prenant $\delta = 10$ nm (manifestement $L \ll \delta$ vu le spectre à 100 nm), et en supposant $\omega_{L,\max} \approx 13,5$, on obtient $L \approx 2$ nm.

REMARQUE

On pourrait exploiter l'ensemble des données via une étude graphique, mais ce n'est pas raisonnable sans calculatrice...

On utilise ensuite la relation du document 4 entre L et θ_e, avec $T = 30$ fs pour un solide d'après le document 1. On trouve $\boxed{\theta_e \approx 10^6 \text{ K (!)}}$.

❑ **21** – L'énergie cinétique totale des électrons est (en utilisant Q19) :

$$n_{L,\max}\,(\delta + 2L)\,\frac{3}{2}k_B\theta_e = n_{0,\max}\delta\frac{3}{2}k_B\theta_e = \text{cste}$$

Si δ augmente $\boxed{\theta_e \text{ diminue}}$.

On reprend l'expression de $\omega_{L,\max}$ de Q19, en remplaçant L par $T\sqrt{\frac{Zk_B\theta_e}{m_i}}$. Par ailleurs, d'après l'expression $L = T\sqrt{\frac{Zk_B\theta_e}{m_i}}$, on en déduit $\frac{L^2}{L_0^2} = \frac{\theta_e}{\theta_{e,0}} = \frac{\delta_0}{\delta}$ puisque $\delta\theta_e = \text{cste}$. Finalement, on en déduit $L = L_0\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta}}$, et donc :

$$\boxed{\omega_{L,\max} = \omega_{0,\max}\sqrt{\frac{\delta}{\delta + 2L_0\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta}}}}}$$

La valeur de $\omega_{L,\max}$ augmente moins vite avec δ que dans le premier modèle, et donc... ?