

Problème 1

1. Milieu isolant et non chargé, donc $\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$.

Maxwell - Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = 0$

Maxwell - Ampère : $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell - Flux : $\text{div}(\vec{B}) = 0$

Maxwell - Faraday : $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2. $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \underbrace{\text{grad}(\text{div}(\vec{E}))}_{=0} - \Delta(\vec{E}) = -\Delta(\vec{E})$

et par ailleurs, $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}(\vec{B}))$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'où $\Delta(\vec{E}) = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

3. L'équation précédente se met sous la forme $\Delta(\vec{E}) = \frac{1}{v_E^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, d'où

$$v_E = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} c \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Si on pose $v_E = \frac{c}{n}$, on voit que $n = \sqrt{\epsilon_r}$

4. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$: polarisation rectiligne selon $\vec{u}_y$.

5. On écrit d'une manière générale $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, donc $\vec{k} = k \vec{u}_x$.

Avec cette forme d'onde plane monochromatique, $\Delta(\vec{E}) = -k^2 \vec{E}$ et $\frac{d\vec{E}}{dt} = (i\omega) \vec{E}$
donc $-k^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon (-\omega^2 \vec{E})$ et donc $k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$ ($\mu_0 \epsilon = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r = \frac{1}{c^2}$)

d'où $k = \frac{n\omega}{c}$ et donc $\vec{k} = \frac{n\omega}{c} \vec{u}_x$

6. On a aussi $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$, et donc $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne :

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \text{et donc} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \quad (\vec{k} \text{ réel})$$

D'où $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (k \vec{u}_x) \wedge (E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y) = \frac{k E_0}{\omega} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$

Comme $\frac{k}{\omega} = \frac{n}{c}$, finalement : $\vec{B} = \frac{n E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$

7. Les champs réfléchis et transmis ont même fréquence et même forme (onde plane, monochromatique et polarisée rectilignement) que le champ incident. Le signe " - " dans $\cos(\omega t + k_n x)$ traduit le sens de propagation ($-\vec{u}_x$) de l'onde réfléchie

8. $k_i = \frac{n_1 \omega}{c}$, $k_r = \frac{n_1 \omega}{c}$ et $k_t = \frac{n_2 \omega}{c} \Rightarrow k_r = k_i$ et $k_t = \frac{n_2}{n_1} k_i$

9. $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x \right) \wedge \left(E_0 \cos(\omega t - k_i x) \vec{u}_y \right) = \frac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_i x) \vec{u}_z$

$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(-\frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x \right) \wedge \left(\rho E_0 \cos(\omega t + k_r x) \vec{u}_y \right) = -\frac{n_1 \rho E_0}{c} \cos(\omega t + k_r x) \vec{u}_z$

$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{n_2 \omega}{c} \vec{u}_x \right) \wedge \left(T E_0 \cos(\omega t - k_t x) \vec{u}_y \right) = \frac{n_2 T E_0}{c} \cos(\omega t - k_t x) \vec{u}_z$

10. On doit avoir $\vec{E}_1(x=0) = \vec{E}_2(x=0)$, avec $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ et $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$

Donc $E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y + \rho E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y = T E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$

et donc $1 + \rho = T$ (1)

De même, $\vec{B}_1(x=0) = \vec{B}_2(x=0)$ donne :

$\frac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z - \frac{n_1 \rho E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = \frac{n_2 T E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z$

et donc $n_1 (1 - \rho) = n_2 T$ (2)

En combinant (1) et (2) on obtient :

$n_1 (1 - \rho) = n_2 (1 + \rho) \Rightarrow \rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$

et $T - 1 = 1 - \frac{n_2 T}{n_1} \Rightarrow T = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$

11. $\vec{T} = \frac{\vec{E}_1 \otimes \vec{B}}{\mu_0}$. $\vec{\pi}_i = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_i x) \vec{u}_x$ $\vec{\pi}_r = \frac{n_1}{\mu_0 c} \rho^2 E_0^2 \cos^2(\omega t + k_r x) (-\vec{u}_x)$
 $\vec{\pi}_t = \frac{n_2}{\mu_0 c} T^2 E_0^2 \cos^2(\omega t - k_t x) \vec{u}_x$

12. On calcule les puissances moyennes incidente, réfléchie et transmise qui traversent une surface S_0 orthogonale à $\vec{u}_x$.

$P_i = \langle \vec{\pi}_i \rangle \cdot \vec{u}_x \cdot S = \frac{n_1 E_0^2 S}{\mu_0 c}$; $P_r = \langle \vec{\pi}_r \rangle \cdot (-\vec{u}_x) S = \frac{n_1 \rho^2 E_0^2 S}{\mu_0 c}$ et $P_t = \langle \vec{\pi}_t \rangle \cdot \vec{u}_x S = \frac{n_2 T^2 E_0^2 S}{\mu_0 c}$

$R = \frac{P_r}{P_i} = \rho^2$ et $T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{n_2 T^2}{n_1}$ On voit que $R + T = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$

Donc $R + T = \frac{(n_1 - n_2)^2 + n_2/n_1 (2 n_1)^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{n_1^2 + n_2^2 - 2 n_1 n_2 + 4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1$, ce qui traduit la conservation de l'énergie -

Problème 2

1. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_x + E_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \vec{e}_y$
relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

2. $\vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \omega} E^2 \vec{k} = \frac{1}{\mu_0 \omega} E^2 \frac{c}{\omega} \vec{e}_z = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{e}_z$. Donc $\vec{H} = \frac{E_0^2}{c} \vec{e}_z$

3. $I = \langle \|\vec{H}\| \rangle = \frac{E_0^2}{c} \langle E^2 \rangle$, et $\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2(\dots) \rangle = \frac{E_0^2}{2}$

D'où $I = \frac{E_0^2}{2c}$

4. $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$. L'effet du champ magnétique est négligeable si $vB \ll E$,
et comme $B = \frac{E}{c}$, cela conduit à $\frac{v}{c} \ll 1$.

5. 2^e loi de Newton : $m_e \vec{a} = q\vec{E} = -e\vec{E}$

donc $\langle a^2 \rangle = \frac{e^2}{m_e^2} \langle E^2 \rangle = \frac{e^2}{m_e^2} \frac{E_0^2}{2}$

$\langle a^2 \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2 m_e^2}$

6. $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$ donc $\langle P \rangle = \frac{e^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 \cdot 2 m_e^2}$

$\sigma = \frac{\langle P \rangle}{I} = \frac{e^4 E_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 \cdot 2 m_e^2 \cdot \frac{E_0^2}{2c}} = \frac{e^4}{6\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^4}$

On peut utiliser $f_{\text{Coulomb}} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$, donc $\frac{e^2}{\epsilon_0}$ homogène à force $\times$ distance², et donc

$\frac{e^4}{\epsilon_0^2}$ homogène à force² $\times$ distance⁴ = masse² $\times$ distance⁶ $\times$ temps⁻⁴

et $\frac{1}{m_e^2 c^4}$ homogène à masse⁻² distance⁻⁴ temps⁴

Ainsi, $\frac{e^4}{\epsilon_0^2 m_e^2 c^4}$ est homogène à une distance² : σ a bien la dimension d'une surface -

A.N : $\sigma \sim \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^4}{6\pi \cdot (9 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (9 \cdot 10^{-31})^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^4} \sim \frac{6 \cdot 10^{-76}}{6\pi \cdot 9^4 \cdot 10^{-54}} \sim \frac{10^{-22}}{1,5 \cdot 10^6} \sim 6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$

7. La puissance associée à l'onde entrante dans le volume de section S et de

hauteur dz vaut $I(z) \cdot S = I(z+dz) \cdot S = - \frac{dI}{dz} S dz$

La puissance diffusée par les électrons vaut $\langle P \rangle n_e(z) S dz$

puissance diffusée
par un électron $\times$ nombre d'électrons

La conservation de l'énergie implique que ces deux puissances sont égales, donc :

$-\frac{dI}{dz} S dz = \langle P \rangle n_e(z) S dz = \sigma I n_e(z)$ et donc $\frac{dI}{dz} = -\sigma n_e(z) I$

8. On sépare les variables: $\frac{dI}{I} = -\sigma n(z) dz$

Et on intègre: $\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\sigma \int_0^h n(z) dz$ donc $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\sigma N$ avec $N = \int_0^h n(z) dz$

et donc $I(h) = I_0 e^{-\sigma N}$

9. Avec $\sigma N \ll 1$, $e^{-\sigma N} \approx 1 - \sigma N$. Donc $I(h) = I_0 (1 - \sigma N)$.

Donc $f = \frac{I_0 - I(h)}{I_0} = \frac{I_0 - I_0(1 - \sigma N)}{I_0}$, donc $f = \sigma N$

10. $N = \int_0^h n(z) dz = h \bar{n}$

D'où $\bar{n} = \frac{N}{h} = \frac{f}{\sigma h}$ et $h = 0,6 \text{ Rs}$

$\bar{n} = \frac{f}{0,6 \sigma h}$

A.N: $\bar{n} \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$

11. 2° loi de Newton appliquée à un électron:

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$ (seule la force électrique s'applique)

en régime sinusoïdal et en notation complexe:

$me(i\omega) \vec{v} = -e \vec{E}$ donc $\vec{v} = \frac{-e \vec{E}}{ime\omega}$

Or, $\vec{j} = (-ne) \vec{v}$ donc $\vec{j} = \frac{ne e^2 \vec{E}}{ime\omega}$, soit $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ avec $\underline{\sigma} = \frac{ne e^2}{ime\omega}$

12. On part de $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\frac{d\vec{E}}{dt}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

Or, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right) = -\frac{d}{dt} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\frac{d}{dt} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}) = -\frac{d}{dt} (\mu_0 \underline{\sigma} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt})$

Donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \underline{\sigma} \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$

Pour une onde plane monochromatique, en notation complexe, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -k^2 \vec{E}$

d'où $-k^2 \vec{E} = \mu_0 \underline{\sigma} (i\omega) \vec{E} + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E}$ et donc $k^2 = -i\mu_0 \underline{\sigma} \omega + \frac{\omega^2}{c^2}$

Soit, en reprenant l'expression de $\underline{\sigma}$: $k^2 = -i\mu_0 \frac{ne e^2}{ime\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\mu_0 ne e^2}{me} + \frac{\omega^2}{c^2}$

On peut noter $\frac{\mu_0 ne e^2}{me} = \frac{ne e^2}{\epsilon_0 me c^2}$ et on pose $\omega_p^2 = \frac{ne e^2}{\epsilon_0 me}$

Alors, $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne e^2}{\epsilon_0 me}}$

13. Une onde peut se propager si k est réel, donc si $\omega > \omega_p$.

Dans le cas contraire, k est imaginaire pur et il n'y a pas de propagation, seulement une atténuation (onde évanescente).

$$14. \quad \rho(x,t) = \underbrace{n_0 e}_{\text{protons}} + \underbrace{n_e(x,t) (-e)}_{\text{electrons}} \quad \text{donc} \quad \rho(x,t) = e(n_0 - n_e(x,t))$$

$$15. \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -e \frac{\partial n_e}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{j} = -n_e e \vec{v}_e \quad (\text{protons r immobiles})$$

$$\text{donc} \quad \operatorname{div}(\vec{j}) = -e \operatorname{div}(n_e \vec{v}_e) = -e \operatorname{div}(n_e v_e \vec{a}_x) = -e \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x}$$

$$\text{Donc} \quad -e \frac{\partial n_e}{\partial t} - e \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = 0}$$

$$16. \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \operatorname{div}(E \vec{a}_x) = \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n_e)}{\epsilon_0}} \quad (2)$$

$$17. \quad \text{me} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}, \quad \text{donc} \quad \text{me} \frac{d(v_e \vec{a}_x)}{dt} = -e E \vec{a}_x \quad \text{donc} \quad \text{me} \frac{dv_e}{dt} = -e E$$

$$\text{En admettant que} \quad \frac{dv_e}{dt} \approx \frac{\partial v_e}{\partial t}, \quad \text{on a} \quad \boxed{\text{me} \frac{\partial v_e}{\partial t} = -e E} \quad (3)$$

$$18. \quad (1): \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0$$

$$\text{avec les hypothèses de l'énoncé,} \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = i\omega N e^{i(\omega t - kx)} \\ \frac{\partial v_e}{\partial x} = v(-ik) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{d'où} \quad \omega N + n_0(-kv) = 0$$

$$\text{soit} \quad \omega N = n_0 k v \quad (1')$$

$$\text{On utilise ensuite (2) qui donne} \quad -ik \underline{E_0} e^{i(\omega t - kx)} = \frac{e(-N e^{i(\omega t - kx)})}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc} \quad ik \underline{E_0} = \frac{Ne}{\epsilon_0} \quad (2')$$

$$\text{Enfin, (3) donne} \quad \text{me}(i\omega) v e^{i(\omega t - kx)} = -e \underline{E_0} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{soit} \quad i\omega \text{me} v = -e \underline{E_0} \quad (3')$$

$$\text{On combine (1'), (2') et (3') :} \quad \omega N = n_0 k v = n_0 k \frac{(-e \underline{E_0})}{i\omega \text{me}} = \frac{-e n_0 k}{i\omega \text{me}} \quad \frac{Ne}{ik \epsilon_0} = \frac{n_0 e^2 N}{\omega \text{me} \epsilon_0}$$

$$\text{donc} \quad \omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \text{me}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \omega_p \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \text{me}}}}$$

$$19. \quad f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}. \quad \text{L'A.N. donne} \quad \boxed{f_p = 90 \text{ MHz}}$$

20. Entre la couche saline et l'atmosphère l'onde se propage dans le vide, donc oui le rayonnement atteint l'atmosphère. La fréquence de coupure de l'ionosphère est inférieure à 90 MHz, donc il peut traverser l'ionosphère, et donc l'atmosphère.

Problème 3

1. $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ et $v_e = c$. Le vide n'est pas un milieu dispersif.

2. Pour une O.P.P.H., $\vec{B} = \frac{h \wedge \vec{E}}{\omega}$, donc $\vec{B}_i = \frac{h_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{1}{\omega} (-h \vec{u}_y) \wedge (E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_x)$
 $= \frac{h E_0}{\omega} \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z$

Donc $\vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

3. charge surfacique $\sigma: C.m^{-2}$ courant surfacique $\vec{j}_s: A.m^{-1}$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans le métal

4. $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \vec{E}_i$ et $\vec{E}_2 = \vec{0}$
 dans l'air dans le vide

la relation de passage $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$ indique que la composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue à l'interface, donc $\vec{E}_1(y=0) = \vec{E}_2(y=0) = \vec{0}$.

On a donc $\vec{E}_n(y=0) = -\vec{E}_i(y=0)$

On, $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_x$ et $\vec{E}_n = E_{0n} \cos(\omega t - ky) \vec{u}_x$, donc $E_{0n} = -E_0$

et donc $\vec{E}_n = -E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{u}_x$

5. $\vec{B}_n = \frac{h_n \wedge \vec{E}_n}{\omega}$ avec $h_n = h \vec{u}_y$ donne

$\vec{B}_n = B_0 \cos(\omega t - ky) \vec{u}_z$

6. $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_n = E_0 \vec{u}_x (\cos(\omega t + ky) - \cos(\omega t - ky))$

donc $\vec{E}_1 = -2 E_0 \sin(\omega t) \sin(ky) \vec{u}_x$ onde stationnaire

7. $\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ donne $\sigma = 0$ ($\vec{n}_{12} = -\vec{u}_y \perp \vec{E}_1$)

$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$ donne $\vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0} (-\vec{u}_y) \wedge (0 - \vec{B}_1) = \frac{\vec{u}_y \wedge \vec{B}_1}{\mu_0}$

il s'agit de $\vec{B}_1$ en $y=0$.

On, $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_n = 2 B_0 (\cos(\omega t + ky) + \cos(\omega t - ky)) \vec{u}_z$

donc $\vec{B}_1(y=0) = 2 B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$

D'où $\vec{j}_s = \frac{2 B_0 \cos(\omega t)}{\mu_0} \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z$ soit

$\vec{j}_s = \frac{2 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t) \vec{u}_x$

8. $P_i = \langle \|\vec{T}_i\| \rangle$ et $\vec{T}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} (E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_x) \wedge (\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z)$
 $= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + ky)$

D'où $P_i = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2 \epsilon_0}{2}$ ($\langle \cos^2(\dots) \rangle = 1/2$)

On trouve la même chose pour P_r , l'énergie incidente est entièrement réfléchie -

9. Cela revient à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction

dans l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\frac{\omega \delta}{c} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow 2\omega^2 \ll c^2 \mu_0 \gamma \omega$$

$$\Leftrightarrow 2\omega \ll \frac{1}{\epsilon_0} \gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma \gg \epsilon_0 \omega \text{ (le facteur 2 est sans importance)}$$

$$= \underbrace{\mu_0 \gamma \vec{E}}_{\text{conduction}} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 (i\omega) \vec{E}}_{\text{déplacement}}$$

10. δ est l'épaisseur de peau, homogène à une longueur.

$$f = 1 \text{ kHz} ; \delta = 5 \text{ mm}$$

$$f = 1 \text{ MHz} ; \delta = 160 \mu\text{m}$$

$$\vec{h}_b = \frac{1}{\delta} (1-i) (-\vec{u}_y)$$

$$\text{Ainsi, } e^{i(\omega t - \vec{h}_b \cdot \vec{OH})} = e^{i(\omega t - \frac{1}{\delta} (1-i) (-y))} = e^{i(\omega t + y/\delta)} e^{y/\delta}$$

Ce qui est cohérent avec l'expression proposée.

$$12. \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = -\vec{\Delta}(\vec{E}) \quad (\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0 = 0 \text{ car } \rho=0)$$

$$\text{or } \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}}(\vec{B}))}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu_0 \vec{j})}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{avec } \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} = \gamma_0 \gamma \vec{E})$$

$$\text{Donc } \vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} : \text{équation de propagation}$$

$$\text{Ensuite, en complexes, } \vec{\Delta}(\vec{E}) = -\vec{h}^2 \vec{E} \text{ et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}, \text{ donc } -\vec{h}^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma i\omega \vec{E}$$

$$\text{D'où } \vec{h}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega : \text{relation de dispersion}$$

$$\text{Enfin, } -i = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ donc } \vec{h} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \mu_0 \gamma \omega, \text{ soit } \vec{h} = \frac{1}{\delta} (1-i) \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

↑ ou avec le signe opposé, mais ici c'est cette possibilité qui convient.

$$13. P_t = \langle \vec{\pi}_t \rangle \text{ avec } \vec{\pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0}$$

$$\text{D'où } \langle \vec{\pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_t^* \wedge \vec{B}_t) \text{ et } \vec{B}_t = \frac{\vec{h} \wedge \vec{E}_t}{\omega},$$

$$\text{donc } \vec{E}_t^* \wedge \vec{B}_t = \vec{E}_t^* \wedge \left(\frac{\vec{h} \wedge \vec{E}_t}{\omega}\right) = (\vec{E}_t^* \cdot \vec{E}_t) \vec{h} - \underbrace{(\vec{E}_t^* \cdot \vec{h}) \vec{E}_t}_{=0 \text{ car } \vec{E}_t^* \perp \vec{h}}$$

$$\text{et } \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^* = \left(\frac{\sqrt{2} \omega \delta}{c} E_0 e^{y/\delta}\right)^2 e^{i(\omega t + y/\delta + \pi/4)} \cdot e^{-i(\omega t + y/\delta + \pi/4)} \underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x}_{=1}$$

$$\text{On a donc } \langle \vec{\pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}\left(\frac{2\omega^2 \delta^2 E_0^2 e^{2y/\delta}}{\omega c^2} \vec{h}\right) = \frac{\delta^2 \omega E_0^2 e^{2y/\delta}}{\mu_0 c^2} \text{Re}(\vec{h})$$

$$\text{Et } \text{Re}(\vec{h}) = \text{Re}\left(\frac{1}{\delta} (1-i) (-\vec{u}_y)\right) = -\frac{1}{\delta} \vec{u}_y$$

On remplace par ailleurs $\frac{1}{\mu_0 c^2}$ par ϵ_0 , d'où :

$$\langle \vec{p}_k \rangle = \epsilon_0 \epsilon_0^2 \delta \omega e^{2i/\delta} (-\vec{u}_y)$$

$$\text{Ainsi, } P_t = \epsilon_0 \epsilon_0^2 \delta \omega e^{2i/\delta}$$

$$14. T = \frac{P_t(y=0)}{P_i} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_0^2 \delta \omega e^{2i/\delta}}{\epsilon_0 c \epsilon_0^2 / 2} = \frac{2 \delta \omega}{c} \quad \text{donc } T = \frac{2 \delta \omega}{c}$$

$$15. \lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad \text{donc } \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad \text{d'où } T = \frac{4\pi \delta}{\lambda_0}$$

16. La conservation de l'énergie à l'interface implique que $R + T = 1$,

$$\text{donc } R = 1 - T$$

$$\text{A.N : } \begin{aligned} f = 1 \text{ kHz} : T &= 2 \cdot 10^{-7} \\ f = 1 \text{ MHz} : T &= 7 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\frac{4\pi \delta}{c}$$