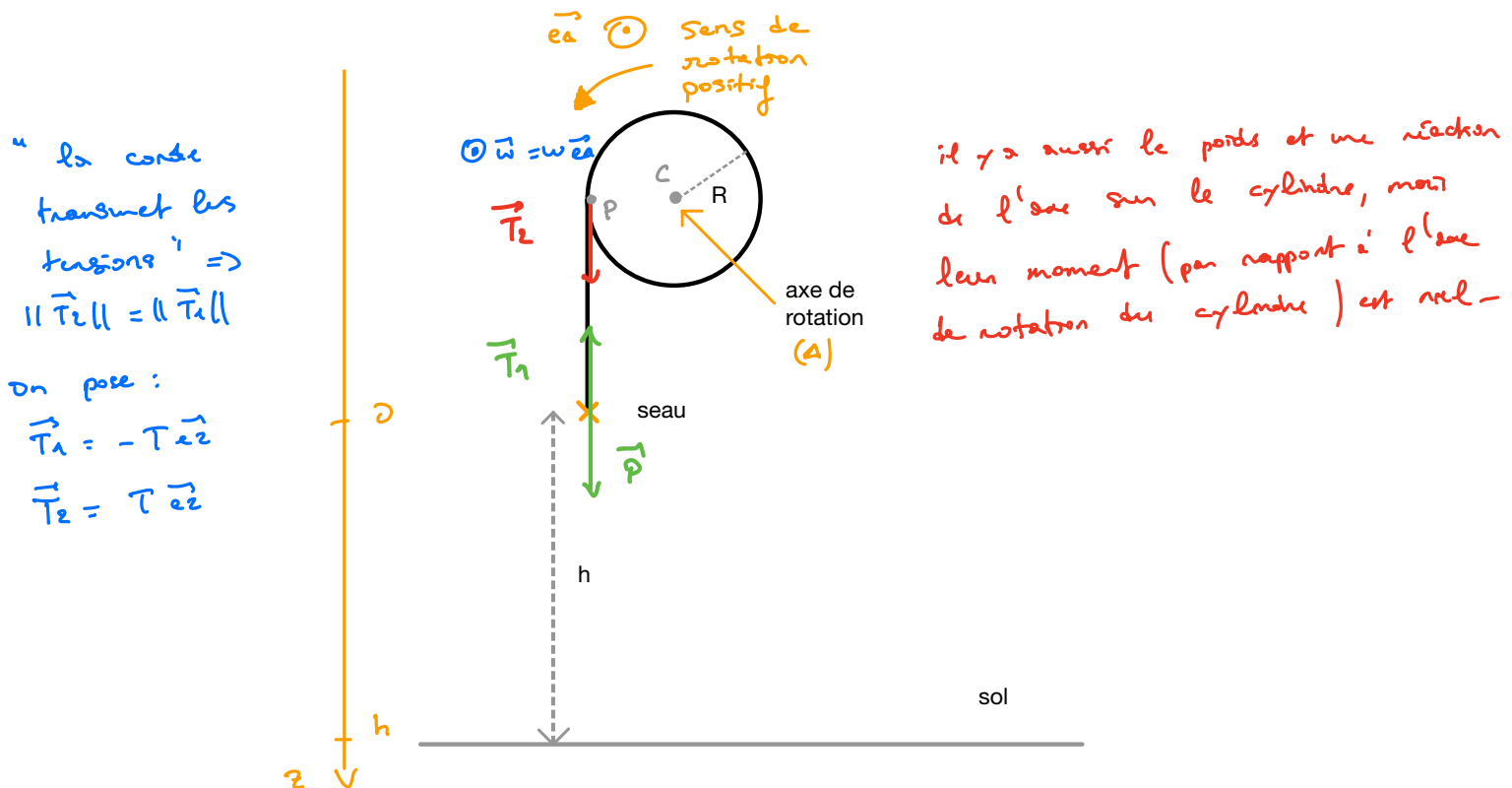


exercice

Un seau est suspendu à une corde qui s'enroule sur un cylindre dont l'axe de rotation est horizontal. On note m_C et R la masse et le rayon du cylindre, l'expression de son moment d'inertie est $J = 1/2 m_C R^2$; la rotation s'effectue sans frottements. La corde est inextensible, et on néglige sa masse. On note m_S la masse du seau. On prend $m_C = 50\text{kg}$; $m_S = 10\text{kg}$ et $R = 20\text{cm}$.

Le seau chute sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 50\text{m}$. Au bout de combien de temps et avec quelle vitesse touche-t-il le sol? Comparer avec le cas où il tombe en chute libre (sans être retenu par la corde).



1^{re} méthode : PFD + th moment cinétique

• PFD pour le seau : $m_S \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}_1$

on projette : $m_S a_z = m_S g - T$ (1)

• th mc pour le cylindre : $\frac{dL_A}{dt} = M_A$ ←

avec $L_A = J\omega$ et $M_A = (\vec{CP} \wedge \vec{T}_2) \cdot \vec{e}_z$

$(\vec{CP} \wedge \vec{T} \text{ est selon } \vec{e}_z) \Big|_1 = RT$

il n'y a que le moment de $\vec{T}_2$.
il y a d'autres forces sur le cylindre (poids, réaction de l'axe), mais elles passent par l'axe de rotation et donc leur moment est nul.

à l'instant $J \frac{d\omega}{dt} = RT$ (2)

• En combinant (1) et (2), on obtient :

$$m_s a_z = m_s g - \frac{J}{R} \frac{d\omega}{dt}$$

Or, $v_z = R\omega$ (quand on tourne le cylindre d'un angle $d\theta$, le seau descend de $dz = R d\theta \Rightarrow v_z = R\omega$)

et donc $a_z = R \frac{d\omega}{dt}$

$$\text{donc } m_s a_z + \frac{J}{R} \frac{a_z}{R} = m_s g \Rightarrow a_z \left(m_s + \frac{J}{R^2} \right) = m_s g$$

or, $J = \frac{1}{2} m_c R^2$, donc $\frac{J}{R^2} = \frac{m_c}{2}$

finalement, $a_z = \frac{m_s g}{m_s + m_c/2}$

En intégrant, avec $v_z(t=0) = 0$ et $z(t=0) = h$, on obtient :

$$v_z = \frac{m_s g}{m_s + m_c/2} t \quad \text{et} \quad z = \frac{m_s g}{2m_s + m_c} t^2$$

Le seau touche le sol pour $z = h$, donc $t_1 = \sqrt{\frac{h(2m_s + m_c)}{m_s g}}$

et sa vitesse est alors $v_1 = v_z(t_1) = \sqrt{\frac{2 h m_s g}{m_s + m_c/2}}$

A.N : $t_1 = 5,9 \text{ s}$ $v_1 = 16,9 \text{ m.s}^{-1}$

Par comparaison, pour la chute libre :

$\hookrightarrow$ ça va évidemment plus vite que quand on doit entraîner le cylindre ---

$$\begin{cases} v_z = gt \\ z = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt{2gh} = 33 \text{ m.s}^{-1} \\ t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,3 \text{ s} \end{cases}$$

2^e méthode : "méthode énergétique"

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = 0$$

- on prendant comme système le seau + le cylindre (+ la corde qui les relie)
- pas de forces non conservatives

Donc, $e_m = e_{c\text{seau}} + e_{p\text{seau}} + e_{c\text{cylindre}}$ ($e_{p\text{cylindre}} = 0$ car elle ne vient pas, on peut la choisir nulle)

avec $e_{c\text{seau}} = \frac{1}{2} m_s v_z^2$

$e_{p\text{seau}} = -m_s g z$

$e_{c\text{cylindre}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \left(\frac{v_z}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_c}{2} v_z^2$

donc $e_m = \frac{1}{2} \left(m_s + \frac{m_c}{2} \right) v_z^2 - m_s g z$

ainsi, $\frac{d e_m}{d t} = 0$ donne $\frac{1}{2} \left(m_s + \frac{m_c}{2} \right) \cdot 2 v_z \frac{d v_z}{d t} - m_s g \frac{d z}{d t} = 0$

$\Rightarrow \left(m_s + \frac{m_c}{2} \right) \underbrace{\frac{d v_z}{d t}}_{= a_z} = m_s g \Rightarrow a_z = \frac{m_s g}{m_s + \frac{m_c}{2}}$

On a bien retrouvé la même accélération qu'avec la première méthode - on conclut de la même manière ---