

I. Dualité onde-corpuscule (1h30)

Ondes électromagnétiques

I.1) $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{u}$ avec \vec{u} : vecteur unitaire selon la propagation
 $v = \|\vec{v}\| =$ vitesse de l'onde dans le milieu

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = m\vec{v}$$

I.2) $E = \hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{2\pi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

Pour le visible : $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ $E = 3,30 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,06 \text{ eV}$
 Pour les rayons X : $\lambda = 10^{-9} \text{ m}$ $E = 1,98 \cdot 10^{-16} \text{ J} = \underline{1,24 \text{ keV}}$

I.3) $p = \hbar k$ avec $k = \frac{m\omega}{c}$ car $v = \frac{c}{n}$

$$p = \frac{\hbar m\omega}{c} = \hbar\omega \times \frac{m}{c} = \frac{hc}{\lambda_0} \times \frac{m}{c} = \frac{mh}{\lambda_0} = p$$

λ_0 : longueur d'onde du photon dans le vide.

Ondes de matière

I.4) $\vec{p} = m\vec{v} = \hbar\vec{k}$

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} = \frac{m\vec{v}}{\hbar}$$

$$E = \hbar\omega$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

I.5) a) L'énergie d'un e^- soumis à un potentiel V est

$$E_{\text{rel}} = -eV$$

Conservation de l'énergie mécanique:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - eV_{\text{init}} = \frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2 - eV_{\text{fin}}$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2 = +e(V_{\text{fin}} - V_{\text{init}}) = eV$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \Rightarrow p = m_e v = \sqrt{2m_e eV}$$

$$\hbar k = \sqrt{2m_e U} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\sqrt{2m_e U}}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$2\pi \hbar = h = \lambda \sqrt{2m_e U}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e U}} = \frac{h}{p}}$$

b) pour le photon $\lambda = 10^{-10} \text{ m}$

$$\text{Ici } \lambda = 10^{-10} \text{ m} \quad \Leftrightarrow \quad U = \frac{h^2}{\lambda^2 2m_e} = \underline{150 \text{ V}} \quad (149,6 \text{ V})$$

I.6) Si l'e⁻ a une vitesse due à l'agitation thermique
 $E \approx k_B T$

$$\text{et } \frac{1}{2} m_e v^2 = E \quad \Leftrightarrow \quad v \approx \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}} \approx 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

L'électron se déplace sur une longueur de l'ordre de $a = 10^{-10} \text{ m}$
à la vitesse $v \approx 10^5 \text{ m.s}^{-1}$

$$\text{Alors } \underline{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} \approx 8 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 80 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 80 \text{ \AA}}$$

I.7) Dans l'ordre chronologique de leurs travaux :

1900 Planck (énergie quantifiée)

1905 Einstein (lumière est constituée de particules quantiques = photons)

1913 Bohr (les e⁻ tournent autour du noyau sur \neq orbites d'énergie bien définie)

1922 Stern et Gerlach (moment angulaire des atomes quantifié
 \rightarrow Spin de l'e⁻)

1923 De Broglie (onde - corpuscule dualité : $\lambda = h/p$)

1926 Schrödinger (eq. d'onde)

1932 Heisenberg (principe d'incertitude)

Diffusion Brillouin

I.8) a) $\vec{q} = \hbar \vec{k} = \hbar k \vec{u} = \frac{\hbar \omega}{v} \vec{u}$

b) $e_p = \hbar \omega = \hbar \nu$

c) $e_p = \hbar \nu = 6,60 \cdot 10^{-34} \text{ J} = \underline{4,13 \cdot 10^{-12} \text{ eV}}$
 $q = \frac{\hbar \nu}{v} = \underline{4,40 \cdot 10^{-34} \text{ ms}^{-1}}$

d) Pour le photon dans le visible
 Énergie : $e'_p = 2 \text{ eV}$ environ (cf I.2) $\Rightarrow e_p \ll e'_p$
 si ce photon est du le vide : $q' = \frac{e'_p}{c} = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ ms}^{-1}$
 donc $q \ll q'$

Le phonon a une énergie et une impulsion très inférieure à celles du photon.

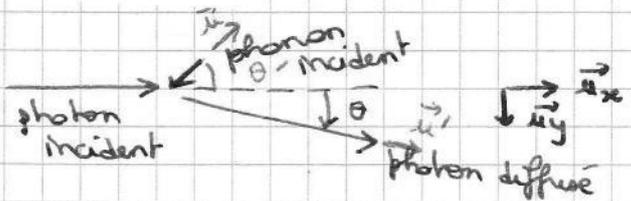
I.9) Dans un système isolé, les forces ^{ext} qui s'exercent sur le système sont nulles

$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ donc $\vec{p} = \text{cte}$

La quantité de mouvement se conserve

Si il n'y a pas de forces qui s'exercent sur le système, alors on a aussi conservation de l'énergie

I.10) a) $q \cong \frac{2 \hbar m}{d \sin c} \sin \frac{\theta}{2}$



Remarque : la conservation de la qte de mouvement est ce qui mène à l'expression fournie par l'énoncé :

$\vec{p}_{inc} + \vec{q} = \vec{p}_{ém}$

qu'on projette sur \vec{u}_x et \vec{u}_y

$$\begin{cases} p_{inc} - q \cos \theta' = p_{ém}^+ \cos \theta \\ -q \sin \theta' = p_{ém}^+ \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -q \cos \theta' = \frac{\hbar \omega}{d \sin c} \cos \theta - \frac{\hbar \omega}{d \sin c} & (1) \\ -q \sin \theta' = \frac{\hbar \omega}{d \sin c} \sin \theta & (2) \end{cases}$$

On fait $(1)^2 + (2)^2$ pour éliminer θ' inconnu.

non demandé

$$q^2 = m^2 h^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\lambda_{em}^2} + \frac{1}{\lambda_{inc}^2} - \frac{2 \cos \theta}{\lambda_{em}^+ \lambda_{inc}} \right] + m^2 h^2 \frac{\sin^2 \theta}{\lambda_{em}^+}$$

soit $q^2 = m^2 h^2 \left[\frac{1}{\lambda_{em}^+} + \frac{1}{\lambda_{inc}} - \frac{2 \cos \theta}{\lambda_{em}^+ \lambda_{inc}} \right]$

et en utilisant le fait que $\lambda_{em}^+ \approx \lambda_{inc}$ (car l'énergie du phonon est faible devant celle du photon)

$$q^2 = m^2 h^2 \frac{2}{\lambda_{inc}^2} [1 - \cos \theta] = \frac{4 h^2 m^2}{\lambda_{inc}^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \boxed{q = \frac{2 m h}{\lambda_{inc}} \sin \frac{\theta}{2}}$$

Conservation de l'énergie:

$$\frac{hc}{\lambda_{inc}} + \hbar \omega = \frac{hc}{\lambda_{em}^+} \Leftrightarrow \hbar \omega = hc \left(\frac{1}{\lambda_{em}^+} - \frac{1}{\lambda_{inc}} \right)$$

qu'on peut écrire $qV = h(\nu_{em}^+ - \nu_{inc})$

d'où $\Delta \nu^+ = \nu_{em}^+ - \nu_{inc} = \boxed{\frac{qV}{h} = \frac{2 m V}{\lambda_{inc}} \sin \frac{\theta}{2} = \Delta \nu^+}$

b) si $\theta = 90^\circ$ $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ i) $\Delta \nu^+ = \frac{\sqrt{2} m V}{\lambda_{inc}} = \underline{5,412 \cdot 10^9 \text{ Hz}}$

ii) on en déduit $\nu_{em}^+ = \nu_{inc} + \Delta \nu^+ = \frac{c}{\lambda_{inc}} + \Delta \nu^+ \approx \nu_{inc} = 5,600 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

donc on peut supposer $\Delta \nu^+ \ll \nu_{inc}, \nu_{em}^+$

et $\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \Delta \lambda^+ = -\frac{c}{\nu_{inc}^2} \Delta \nu^+ \Leftrightarrow \frac{\Delta \lambda^+}{\lambda_{inc}} = -\frac{c}{\nu_{inc}^2 \lambda_{inc}} \Delta \nu^+$

d'où $\boxed{\frac{\Delta \lambda^+}{\lambda_{inc}} = -\frac{\Delta \nu^+}{\nu_{inc}} = -9,56 \cdot 10^{-6}}$

c) Résolution du spectromètre à réseau insuffisante.

II. Interférométrie à fort pouvoir de résolution (2h20)Etude en incidence normale

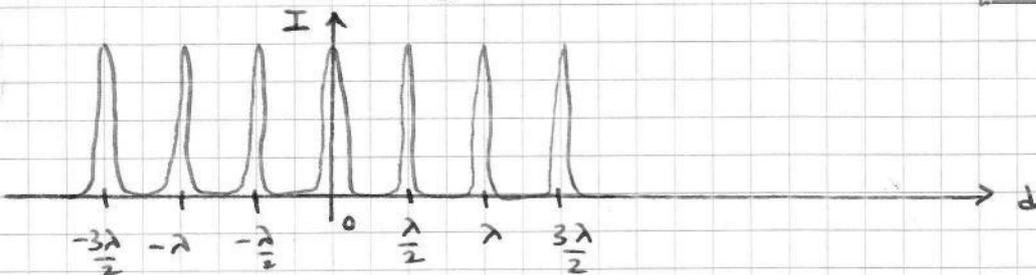
II. 1) $\Delta L = 2d$

II. 2) Interférences constructives ssi $\varphi = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda} = 2p\pi$ avec p entier

II. 3) $\frac{2\pi \times 2d}{\lambda} = 2p\pi \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{2d}{\lambda}}$

II. 4) a) on obtient des interf. constructives ssi

$$d = p \frac{\lambda}{2} \text{ avec } p \text{ entier} \text{ soit } \boxed{d_p = p \frac{\lambda}{2}}, p \in \mathbb{Z}$$

b) La plus petite variation δ de d entre 2 max d'intensité est de $\frac{\lambda}{2}$

$$\boxed{\delta = \frac{\lambda}{2}}$$

Application à la diffusion Brillouin

II. 5)

$$\text{photon} \begin{cases} \lambda^- = \frac{c}{\nu^-} \Rightarrow \nu^- = \frac{c}{\lambda^-} \\ \lambda_{inc} = \frac{c}{\nu_{inc}} \Rightarrow \nu_{inc} = \frac{c}{\lambda_{inc}} \\ \lambda^+ = \frac{c}{\nu^+} \Rightarrow \nu^+ = \frac{c}{\lambda^+} \end{cases}$$

Comme $\lambda > \lambda_{inc} > \lambda^+$ alors $\frac{1}{\lambda^-} < \frac{1}{\lambda_{inc}} < \frac{1}{\lambda^+}$ soit $\nu^- < \nu_{inc} < \nu^+$ Le spectre en fréquence est ν^-, ν_{inc} et ν^+ tq $\boxed{\nu^- < \nu_{inc} < \nu^+}$

II. 6) ordre p pour $\lambda_{inc} \Rightarrow \boxed{d_0 = p \frac{\lambda_{inc}}{2}}$

II. 7) a) ordre $p+1$ si $d = (p+1) \frac{\lambda_{inc}}{2} = d_0 + \frac{\lambda_{inc}}{2} = d_0 + \delta$
ordre $p-1$ si $d = (p-1) \frac{\lambda_{inc}}{2} = d_0 - \frac{\lambda_{inc}}{2} = d_0 - \delta$

donc $\boxed{\delta = \frac{\lambda_{inc}}{2}}$

b) pic d'ordre p pour λ^- : $d = p \frac{\lambda^-}{2} = d_0 + \epsilon = p \frac{\lambda_{inc}}{2} + \epsilon$

soit $\epsilon = \frac{p}{2} (\lambda^- - \lambda_{inc}) = \frac{p}{2} \Delta \lambda^-$

De m^e pic d'ordre p pour λ^+ : $d = p \frac{\lambda^+}{2} = d_0 - \epsilon = p \frac{\lambda_{inc}}{2} - \epsilon$

soit $\epsilon = \frac{p}{2} (\lambda_{inc} - \lambda^+) = -\frac{p}{2} \Delta \lambda^+$

Est-ce évident que $\Delta \lambda^- = -\Delta \lambda^+$?

c)
$$Z = (\Delta v^+) \frac{\delta}{\epsilon} = (\Delta v^+) \frac{\lambda_{inc}}{2} \times \frac{2}{p(\lambda^- - \lambda_{inc})}$$

$$= \frac{(\Delta v^+) \lambda_{inc}}{p(\lambda^- - \lambda_{inc})} = \frac{(\Delta v^+) \lambda_{inc}}{2d_0 \times \frac{c(\Delta v^+)}{v_{inc}^2}} = \frac{\lambda_{inc}^2 v_{inc}^2}{2d_0 \times c}$$

$$= \frac{c^2}{2d_0 \times c} = \boxed{\frac{c}{2d_0} = Z}$$

On a bien $Z = \frac{c}{2d_0}$.

si $\Delta v^+ > Z$ alors $Z = (\Delta v^+) \frac{\delta}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\delta}{\epsilon} < 1$

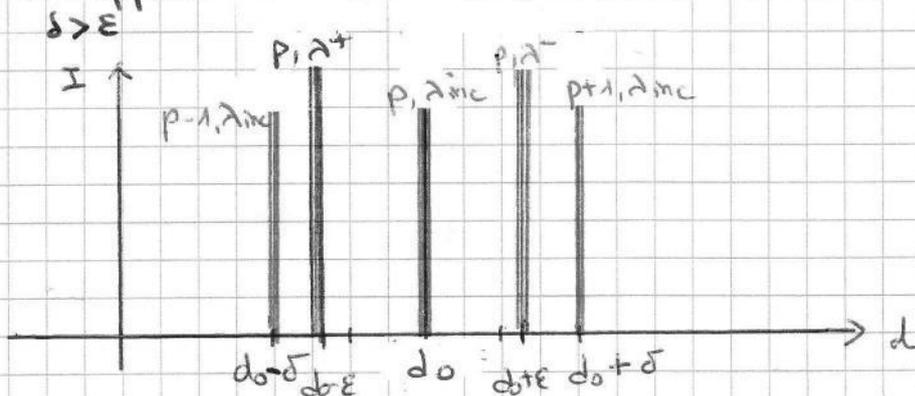
si $\delta < \epsilon$ alors sur l'intervalle de 2δ de part et d'autre de d_0 on ne verra pas les raies brillouin.

Il faut donc choisir d_0 tq $Z > \Delta v^+$ soit $\frac{c}{2d_0} > \Delta v^+$

(\Rightarrow) $\boxed{d_0 < \frac{c}{2\Delta v^+}}$ soit $\underline{d_0 < 0,028 \text{ m} = 2,8 \text{ cm}}$

d) on suppose

$d_0 = 1,25 \text{ cm}$ convient



II.8) a) $Z = \frac{c}{2d_0} = 15 \text{ GHz} \Rightarrow \underline{d_0 = 1 \text{ cm}}$

les 3 pics tq $G = 0,89$ correspondent aux ordres $p-1, p$ et $p+1$ de la fréquence ν_{inc} .

les 4 pics d'intensité supérieures sont ceux de Brillouin.

$d_0 = \frac{p \lambda_{inc}}{2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{2d_0}{\lambda_{inc}} = 37736}$

On peut en déduire $\delta = \frac{\lambda_{inc}}{2} = \underline{0,265 \mu\text{m}}$

$\epsilon = -\frac{p}{2} \Delta\lambda^+ = \underline{0,096 \mu\text{m}}$

$\frac{\lambda^+}{2} \approx \frac{\lambda^-}{2} \approx \frac{\lambda_{inc}}{2} = \delta \gg \epsilon$

De plus $\lambda^- > \lambda_{inc} > \lambda^+$.

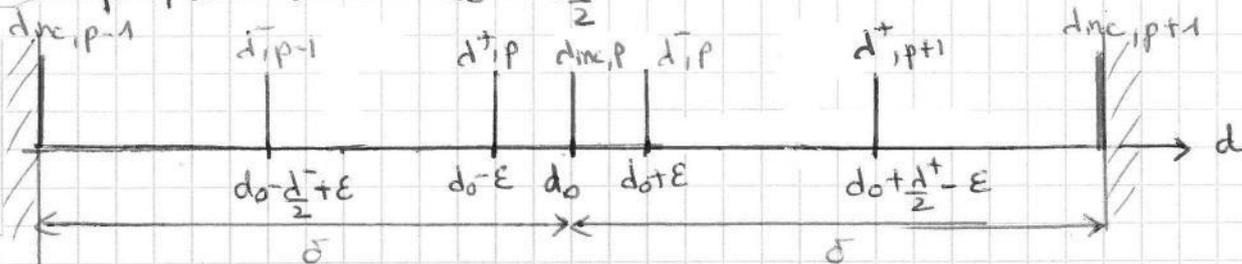
On va considérer les 9 pics éventuels pour les 3 ordres $p-1, p, p+1$ et les 3 fréquences $\nu^- < \nu_{inc} < \nu^+$ et on va les classer (en fonction de d)

$$\left. \begin{array}{l} p-1, \lambda_{inc} \rightarrow d = d_0 - \delta \\ p, \lambda_{inc} \rightarrow d = d_0 \\ p+1, \lambda_{inc} \rightarrow d = d_0 + \delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} p-1, \lambda^- \rightarrow d = d_0 + \epsilon - \frac{\lambda^-}{2} \\ p, \lambda^- \rightarrow d = d_0 + \epsilon \\ p+1, \lambda^- \rightarrow d = d_0 + \epsilon + \frac{\lambda^-}{2} > d_0 + \delta \end{array}$$

$p-1, \lambda^+ \rightarrow d = d_0 - \epsilon - \frac{\lambda^+}{2} < d_0 - \delta \rightsquigarrow$ pas dans l'intervalle

$p, \lambda^+ \rightarrow d = d_0 - \epsilon$

$p+1, \lambda^+ \rightarrow d = d_0 - \epsilon + \frac{\lambda^+}{2}$

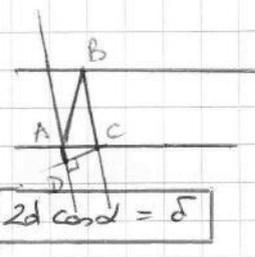


décalage en fréquence (GHz)	0,0	5,4	9,6	15,0	21,4	25,6	30,0
ordre	p-1	p-1	p	p	p	p+1	p+1
fréquence	λ_{inc}	λ^-	λ^+	λ_{inc}	λ^-	λ^+	λ_{inc}

b) $\Delta\nu^+ = 4,8 \text{ GHz} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\lambda_{inc} \Delta\nu^+}{\sqrt{2} m}} = \underline{1353 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

($\sim 1 \text{ h}20$)

Pouvoir de résolution de l'interféromètre



$$\text{II.9) a) } \delta = \frac{AB+BC}{\cos \alpha} - \frac{AD}{\cos \alpha} = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2d}{\cos \alpha} (1 - \sin^2 \alpha) = \boxed{2d \cos \alpha = \delta}$$

b) le 1^{er} rayon transmis a une amplitude a $R a e^{j \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}}$
 le 2^e $R^2 a e^{j \frac{4\pi \delta}{\lambda_0}}$
 le n^e $R^{n-1} a e^{j(n-1) \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}}$

or $\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0} d \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2d \cos \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$

Alors l'amplitude du n^e rayon transmis est :

$$\underline{a}_n = R^{n-1} a e^{j(n-1)\phi}$$

$$\text{c) } \underline{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n = a \sum_{n=1}^{\infty} R^{n-1} e^{j(n-1)\phi} = a \sum_{n=1}^{\infty} (R e^{j\phi})^{n-1}$$

$$\underline{A} = a \sum_{n=0}^{\infty} (R e^{j\phi})^n = \frac{1}{1 - R e^{j\phi}}$$

d) $G(d, d) = \frac{I}{I_{ref}}$

$G(d, d)$ est max si les ondes sont en phase

Tous les rayons de \hat{m} direction α convergent au \hat{m} point sur l'écran.

Par symétrie de révolution autour de la normale aux miroirs, on observe \hat{m} intensité (α est le \hat{m})

On observe des anneaux d'intensités variables

e) Les ondes sont en phase si $\boxed{\phi = 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $d=0$ $G(0, d) = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \right) \right]^{-2}$

$$G(0, d) = \frac{1}{1 + \frac{4(1-p)}{p^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \right)} \quad R = 1-p, \quad p \ll 1$$

$$\boxed{G(0, d) = \frac{1}{1 + \frac{4}{p^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \right)} = \frac{p^2}{4 \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \right)} = \left(\frac{1-R}{2 \sin \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \right)} \right)^2}$$

II-10). $d = d_0 = \frac{p \lambda_0}{2}$ $p \in \mathbb{Z}$

$G(0, d) > \frac{1}{2}$

a) en électricité pour déterminer la bande-passante d'un filtre. mais avec $G > \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $d_0 = \frac{p \lambda_0}{2}$ donne $\boxed{p = \frac{2d_0}{\lambda_0} = \frac{47604}{\lambda_0}}$ (si $\lambda_0 = \lambda_{inc}$)??

c) $\Delta d = d^+ - d^-$ avec $G(0, d^+) = G(0, d^-) = \frac{1}{2}$

$\frac{1-R}{2 \sin(\frac{2\pi d^\pm}{\lambda_0})} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(\frac{2\pi d^\pm}{\lambda_0}) = \pm (1-R) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

soit $d^\pm = \pm \frac{\lambda_0}{2\pi} \text{Arc sin}(\frac{p\sqrt{2}}{2}) \approx \pm \frac{\lambda_0}{2\pi} p \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\Delta d = d^+ - d^- = 2 d^+ = \frac{\lambda_0}{\pi} p \frac{\sqrt{2}}{2}}$

d) ordre p: long. d'onde $\lambda \rightarrow d$.
ordre p: " " " $\lambda + \Delta\lambda \rightarrow d + \Delta d'$

On sépare les 2 pics si $\Delta d' > \frac{\Delta d}{2}$ (et pas $\frac{\Delta\lambda}{2}$ com écrit de l'énoncé)

ordre p avec λ : d vérifie $\phi = 2\pi p = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2d$

soit $p = \frac{2d}{\lambda} \Leftrightarrow 2d = \lambda p$

ordre p avec $\lambda + \Delta\lambda$: $p = \frac{2d'}{\lambda + \Delta\lambda} \Leftrightarrow 2d' = (\lambda + \Delta\lambda) p$

Donc $\Delta d' = d' - d = \frac{(\lambda + \Delta\lambda)p}{2} - \frac{\lambda p}{2} = \frac{\Delta\lambda p}{2}$

$\Delta d' > \frac{\Delta d}{2} \Leftrightarrow \frac{\Delta\lambda p}{2} > \frac{\Delta d}{2} \Leftrightarrow p \Delta\lambda > \Delta d$

soit $p \Delta\lambda > \frac{\lambda_0}{\pi} p \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \Delta\lambda > \frac{\lambda_0}{\pi} p \frac{\sqrt{2}}{2p}$

le plus petit écart détectable est:

$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0 \sqrt{2}}{2\pi p}}$

e) ??

II. 11) $\Delta d = \frac{d_0}{\pi} \rho \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\rho = 0,5$ si $\lambda_0 = 0,53 \mu\text{m}$

$\rightarrow \Delta d = 0,060 \mu\text{m}$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\rho} \rho = \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{4\pi d_0} \rho = \frac{\Delta d}{2d_0} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = 2,4 \cdot 10^{-6}}$$

$$\alpha_{\min} = \frac{\rho^2}{4} \quad (\text{qd } \sin^2(\frac{2\pi d}{\lambda_0}) = 1 \text{ max}) \quad \alpha_{\min} = 0,0625$$

Observation du décalage Brillouin dans l'expérience précédente :

D'après II.10) b) $|\frac{\Delta \lambda^+}{\lambda_0}| \approx 10^{-5} > \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \Rightarrow$ on peut l'observer.

II. 12) onde stationnaire dans une cavité

on a $L = m \frac{\lambda}{2}$ (noeuds à chaque extrémité et $\frac{\lambda}{2}$ entre 2 noeuds successifs)

alors $\boxed{\lambda = \frac{2L}{m}}$ et $\boxed{v = \frac{c}{\lambda} = \frac{mc}{2L}}$

Quel résultat retrouve-t-on ?

$\rightarrow 1h$