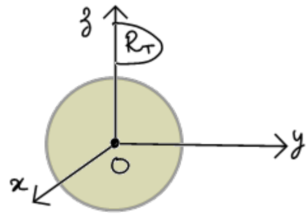
2025 - CCINP - MP - Physique

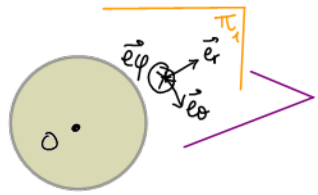
Partie I - Etude du mvt d'un satellite

I.1.



Q1 - * Réf. géocentrique : $\left\{\begin{array}{l}\text{centre au centre de masse de la Terre} \\ \text{axes dirigés vers 3 étoiles fixes -}\end{array}\right.$

* Un référentiel est dit "galiléen" si le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé, repéré dans ce référentiel, est une translation rectiligne et uniforme -



Q2 - * Symétries de la distribution de masse $\mathcal{D}$ qui constitue la Terre :

$\left.\begin{array}{l}\pi_1 = (M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}) \\ \pi_2 = (M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})\end{array}\right\}$ plans de sym. de $\mathcal{D}$ donc de $\vec{\mathcal{G}} \Rightarrow \vec{\mathcal{G}} \in \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(M)\vec{e_r}}$

* Invariance de $\mathcal{D}$: par rotation d'angles θ et φ autour de $O \Rightarrow \|\vec{\mathcal{G}}\|$ ne dépd que de r

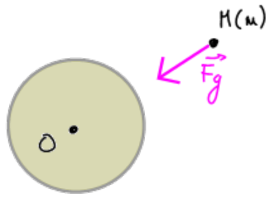
↳ $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e_r}}$

* Th de Gauss gravitationnel : $\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{dS} = -4\pi G M_{int}$

surface de Gauss choisie = sphère centrée en O, passant par M, avec ici M extérieur à la Terre

↳ $\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_T$ ($r > R_T$ ici) $\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{G M_T}{r^2}\vec{u}}$ ($r > R_T$) ($\vec{u} = \vec{e_r}$)

* Force de gravitation ressentie par le mobile de masse m : $\boxed{\vec{F_g} = m\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{G m M_T}{r^2}\vec{u}}$



Q3 - TMC appliqué au mobile (m) dans R_T : $\frac{d\vec{\mathcal{L}_O}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_g})$ seule force subie par M

$= \vec{OM} \wedge \vec{F_g} = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{F_g}$ colinéaires

↳ $\boxed{\vec{\mathcal{L}_O}(M) = \vec{cste}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \forall t, (\vec{OM}, \vec{v}) \in$ plan $\perp \vec{\mathcal{L}_O}$ (plan qui reste toujours le même)

$\Rightarrow$ le mouvement de M reste contenu dans ce plan

Q4 - On cherche $\mathcal{E}_p$ t.q. $\boxed{\vec{F_g} = -\vec{grad}(\mathcal{E}_p)} \Leftrightarrow -\frac{G m M_T}{r^2}\vec{e_r} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\vec{e_r} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{G m M_T}{r}}$ (+cste)

prise nulle pour que $\mathcal{E}_p \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$

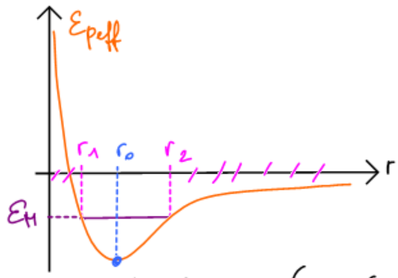
Q5 - La seule force ($\vec{F_g}$) subie par M étant conservative, d'après le TEM, on a $\boxed{\mathcal{E}_M = cste}$

$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G m M_T}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{G m M_T}{r}$

Or $\vec{\mathcal{L}_O}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = m r^2 \dot{\theta}\vec{e_z} = \vec{cste} \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = cste = \frac{\mathcal{L}_O}{m}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{G m M_T}{r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}}$

Q6 - $\mathcal{E}_M = cste = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}$ où $\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_M \geq \mathcal{E}_{p,eff}}$ forcément

Q7 –



E_M d'un état lié telle que la trajectoire reste bornée
donc $E_M<0$ forcément (sinon on peut avoir $r\to+\infty$)
Ici $r>r_2$ et $r<r_1$ interdits (car $E_{peff}>E_M$).

Q8 – * Pour un mvt elliptique (associé à un état lié), on a $E_M=E_{peff}$ aux positions extrêmes (la ⊕ proche : périgée, et la ⊕ lointaine : apogée) de la trajectoire.

* Quand on a $E_M=\min(E_{peff})=E_{peff}(r_0)$ on a alors forcément $r=r_0$ ($\forall t$) : mvt circulaire

Q9 – Sur l'orbite altimétrique de référence (circulaire de Rayon R) :

d'après le PFD appliqué au satellite (m) dans R_T : $m\vec{a}=\vec{F_g} \Rightarrow -m\frac{v^2}{R}=-\frac{GmM_T}{R^2}$ (selon $\vec{e_r}$)

$\Rightarrow \boxed{v_{alt}=\sqrt{\frac{GM_T}{R}}}$

D'où $\boxed{E_{M\,alt}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM_T}{R}=-\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{R}}$

Q10 – La période de révolution du satellite est alors : $\boxed{T=\frac{2\pi R}{v}}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_T}} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}}$ 3e loi de Kepler

Q11 – ⚠ Je pense que cette question n'est pas dans l'esprit du programme, car l'énoncé ne précise pas que l'expression reliant E_M et R obtenue à Q9 reste valable dans le cas d'une orbite elliptique, en remplaçant 2R par 2a (grand-axe de l'ellipse)

* En admettant cela, $\boxed{E_{M\,tra}=-\frac{GmM_T}{2a}}$ où $\boxed{2a=R+R_c}$

* Sinon, on peut utiliser les 2 positions particulières auxquelles $\dot{r}=0$: en $r=R$ et $r=R_c$

↳ $\begin{cases} E_{M\,tra}=0+\frac{L_0^2}{2mR^2}-\frac{GmM_T}{R} \Rightarrow \frac{L_0^2}{2m}=R^2\left[E_{M\,tra}+\frac{GmM_T}{R}\right] \\ E_{M\,tra}=0+\frac{L_0^2}{2mR_c^2}-\frac{GmM_T}{R_c}=\frac{R^2}{R_c^2}\left[E_{M\,tra}+\frac{GmM_T}{R}\right]-\frac{GmM_T}{R_c} \Rightarrow E_{M\,tra}\left[1-\frac{R^2}{R_c^2}\right]=\frac{GmM_T}{R_c^2}\left[R-R_c\right] \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{E_{M\,tra}=-\frac{GmM_T}{R+R_c}}$

Q12 – $\Delta E_M=E_{M\,tra}-E_{M\,alt}=-GmM_T\left[\frac{1}{R+R_c}-\frac{1}{2R}\right]=-GmM_T\frac{R-R_c}{2R(R+R_c)}<0$ car $R>R_c$ ⇒ il faut que $E_M\downarrow$

donc, comme au lieu A de ce chgt d'orbite, $E_p=E_p(R)$ reste la même, on a : $\Delta E_M=\Delta E_c<0$

⇒ il faut donc que $v_{A,tra}<v_{A,alt}$ donc il faut freiner le satellite.

Q13 – De même en P : $\boxed{\Delta E_M'}=E_{M\,cir}-E_{M\,tra}=-GmM_T\left[\frac{1}{2R_c}-\frac{1}{R+R_c}\right]=\boxed{-GmM_T\frac{R-R_c}{2R_c(R+R_c)}<0}$ idem

donc par le même raisonnement qu'à Q12, on prévoit que $\Delta E_c'<0$

⇒ là encore, en P, il faut freiner le satellite pour le faire passer de l'orbite de transfert à l'orbite circulaire.