

La planète Terre

Ce sujet évoque quelques considérations relatives à l'état de notre planète (**figure 1**) et au réchauffement qu'elle est en train de subir. De nombreux dispositifs sont dédiés à la compréhension et à la surveillance du changement climatique. Certains sont envoyés en orbite autour de la Terre pour procéder à des mesures depuis l'espace. Les satellites altimétriques permettent de surveiller la montée du niveau des océans causée par la fonte des glaces et la dilatation des eaux réchauffées. La **première partie** étudie le mouvement de ces satellites. La **deuxième partie** traite du dispositif de mesure en lui-même. Enfin, on s'intéresse dans la **troisième partie** à la propulsion d'un vaisseau qui, dans le cas où le changement climatique rendrait un jour la Terre invivable, pourrait servir à transporter une partie de l'humanité vers d'autres planètes habitables.



Figure 1 - Image de la Terre prise par l'équipage de la mission Apollo 17 en 1972. Crédit : NASA

À une grandeur physique évoluant sinusoïdalement avec le temps $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, on associera la grandeur complexe $\underline{f}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$, dont la partie réelle s'identifie à la grandeur physique $f(t)$ et où i est l'unité imaginaire, nombre complexe dont le carré vaut -1 .

Par commodité de représentation, les figures de l'énoncé ne respectent pas les échelles.

Certaines données sont regroupées ci-dessous. Lorsqu'une application numérique est demandée, le candidat pourra se contenter d'exprimer le résultat avec un seul chiffre significatif.

Données

- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

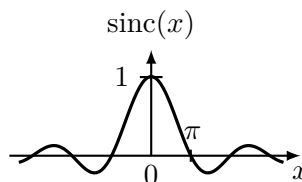
Formulaire

- Double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

- Sinus cardinal :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



Partie I - Étude du mouvement d'un satellite

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans (figure 2).

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0,1)$ mm/an durant ces trente dernières années.

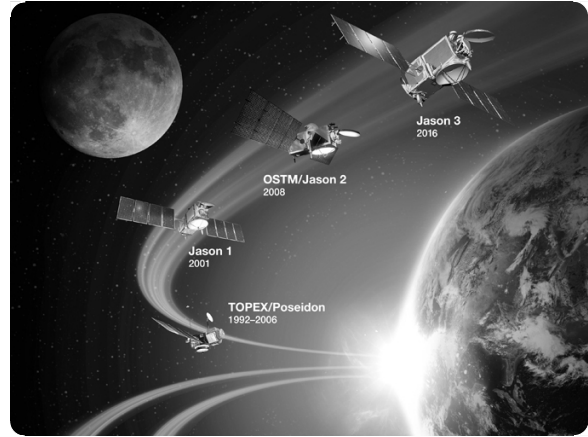


Figure 2 - Satellites altimétriques lancés depuis 1992. Vue d'artiste. Crédit : CNES

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T .

I.1 - Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_T$) considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

- Q1.** Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.
- Q2.** Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\vec{g}(M)$ et les invariances de sa norme, établir l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G , de la masse M_T , de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \overrightarrow{OM}/r$. En déduire l'expression $\vec{F}_g$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m .
- Q3.** Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel ($\mathcal{R}_T$) le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\vec{L}_O$ soit aligné avec $\vec{e}_z$. On posera $\vec{L}_O = L_0 \vec{e}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ) , de centre O , pour décrire le mouvement du mobile (figure 3).

- Q4.** Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

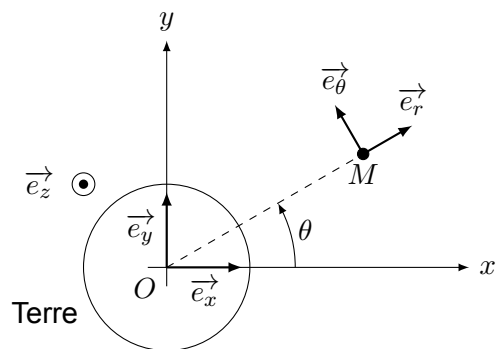


Figure 3 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

Q5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé *énergie potentielle effective*, que l'on exprimera en fonction de G , m , M_T , $\mathcal{L}_0$ et de r .

- Q6.** Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.
- Q7.** Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r . Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.
- Q8.** Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R . Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m , assimilable à un point matériel.

- Q9.** Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G , M_T , m et de R .
- Q10.** Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

I.2 - Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré **figure 4**, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périogée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

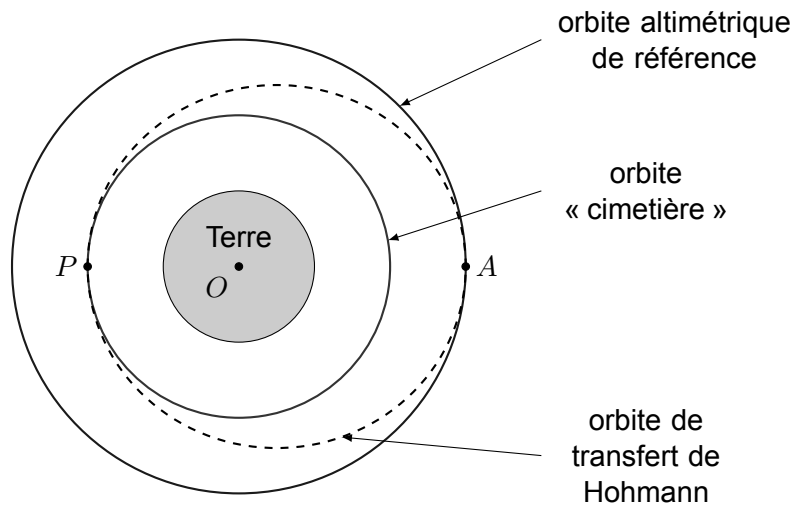


Figure 4 - Tracé des différentes orbites du satellite

Q11. En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}.$$

Q12. Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Q13. En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.