

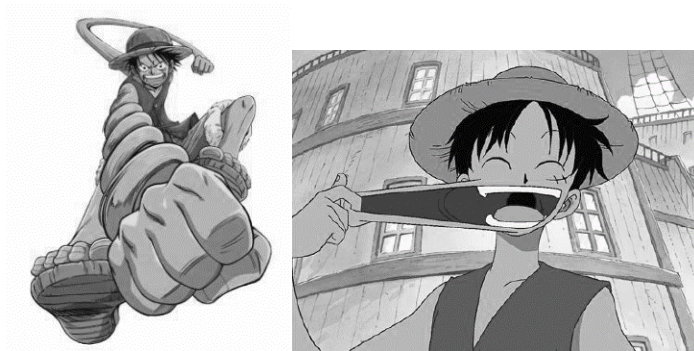
One Piece est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon*.

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.

Ce sujet aborde diverses questions de physique très librement inspirées de cette œuvre.

PARTIE I - *Gomu no jet pistol* : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique



Luffy peut étendre ses bras, notamment en emmagasinant l'énergie potentielle élastique et frapper son adversaire. On se propose ici de modéliser un exemple d'extension élastique.

I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction (Ox) . En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_0 \left[1 - e^{-a(x-x_0)} \right]^2$$

avec V_0 , a et x_0 des constantes réelles positives.

Q1. Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre $x_{\text{éq}}$.

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre : $x = x_{\text{éq}} + \varepsilon$, avec $|\varepsilon| \ll x_{\text{éq}}$.

Q2. En développant l'énergie potentielle $V(x)$ au second ordre en ε , montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_0 et de a .

- Q3.** Si on appliquait cette force à une particule de masse m et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations ω_0 de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps $t \rightarrow \varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0) = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.
- Q4.** Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note m cette masse des masselottes entre les ressorts, $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$ le vecteur position de la $n^{\text{ième}}$ masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à $t = 0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre a (**figure 1**) est égale à la longueur à vide, $\ell_0 = a$.

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n = 0$ à $t = 0$.

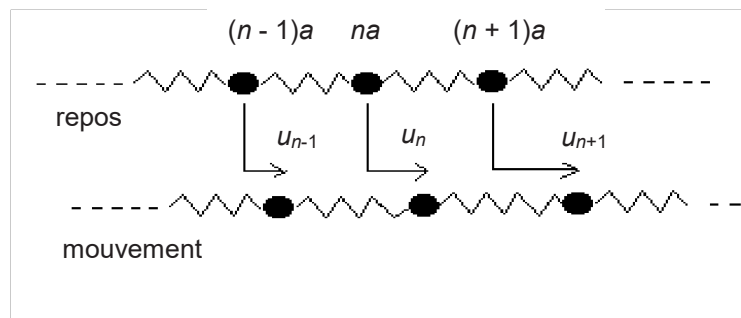


Figure 1 - Chaîne d'oscillateurs identiques

- Q5.** Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la $n^{\text{ième}}$ masse ($x_n(0)$) en fonction de n et de a . En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x_n(t)$, n et de a .
- Q6.** Établir que l'équation du mouvement de la $n^{\text{ième}}$ masse, se met sous la forme : $\ddot{u}_n = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$ avec α , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel q strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$\underline{u}_n(t) = U_0 \exp(i(\omega t - qna)) \text{ avec } i^2 = -1, \omega \text{ et } U_0 \text{ strictement positifs.}$$

- Q7.** Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_0 et ω ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une $p^{\text{ième}}$ masse (avec $p > n$) telle que : $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t)$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

Q8. Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de a . Que représente finalement q ?

Q9. Montrer que la relation de dispersion, reliant ω et q , est $\omega^2 = 4\omega_0^2 \left(\sin \frac{qa}{2} \right)^2$.

Représenter graphiquement la fonction : $[q \mapsto \omega(q)]$ en se restreignant à l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$.

Q10. Rappeler les définitions et les significations de la vitesse de groupe v_g et de la vitesse de phase v_ϕ . Comment lit-on ces vitesses sur le graphe de la question **Q9** ?

Q11. La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire ω pour que q existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.

Q12. Déterminer v_g et v_ϕ pour $q \ll \frac{\pi}{a}$ et pour $q = \frac{\pi}{a}$. On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.

Le fluide (ou haki en VO) est un pouvoir mystérieux du manga, qui permet à son possesseur d'utiliser sa propre énergie spirituelle à des fins diverses, notamment pour renforcer sa peau et la rendre aussi dure qu'un diamant.

I.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes.

Hypothèses du modèle :

- tous les défauts du cristal réel sont négligés ;
- l'agitation thermique n'est qu'une vibration autour d'une position moyenne des atomes qui sera prise comme position d'équilibre ;
- les vibrations d'origine thermique sont décomposables en ondes planes ;
- seules les interactions entre plus proches voisins dans une maille cristalline cubique simple sont considérées : les trois dimensions de l'espace sont découplées et l'étude sera faite sur l'une d'elles selon le modèle d'un cristal à une dimension ;
- l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse m , distants de x , sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

Q13. À quelles interactions correspondent les deux termes du potentiel de Lennard-Jones ?

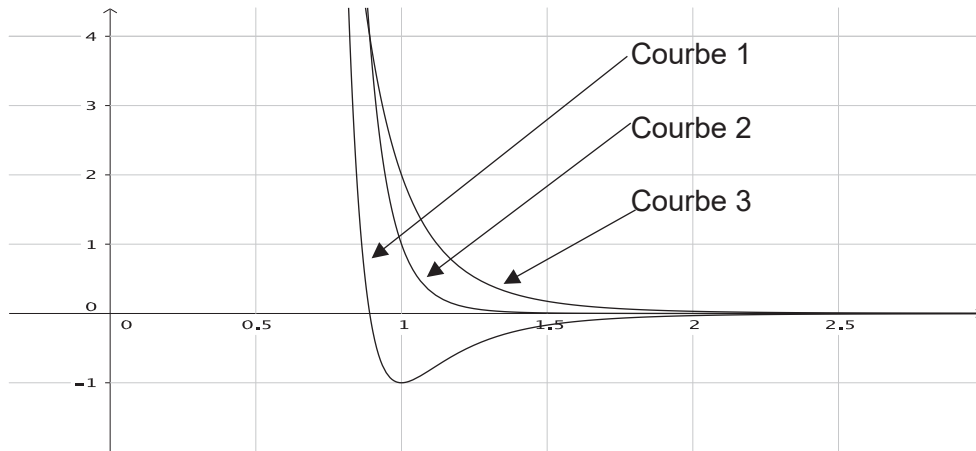
Q14. En notant a , la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que V se met sous la forme :

$V(x) = \Theta_0 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right]$, où la profondeur du puits de potentiel Θ_0 est à exprimer en fonction de B et de a .

Q15. Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes :

$$\left[\frac{x}{a} \mapsto \frac{V(x)}{\Theta_0} \right], \left[\frac{x}{a} \mapsto \left(\frac{a}{x} \right)^{12} \right] \text{ et } \left[\frac{x}{a} \mapsto 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right].$$

Identifier ces courbes.



Q16. Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant a , la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction de Θ_0 et de a . On pourra développer le potentiel au second ordre grâce à la formule de Taylor.

Q17. Calculer k et ω_0 pour $a = 2,0 \cdot 10^{-10}$ m, $\Theta_0 = 0,10$ eV et $m = 1,0 \cdot 10^{-25}$ kg.

Cette modélisation du solide cristallin permet de décrire la propagation d'ondes mécaniques longitudinales dans les solides et on s'intéresse ici aux aspects énergétiques. On suppose que le mouvement des masses correspond au passage d'une onde plane harmonique de pulsation ω dont la formule est indiquée entre les questions **Q6** et **Q7**.

Q18. Exprimer la valeur moyenne temporelle de l'énergie cinétique $\langle E_c \rangle$ d'un atome indicé par n en fonction de m , U_0 et ω . En déduire l'énergie cinétique moyenne pour N atomes.

Q19. Justifier que l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p \rangle$ du $n^{\text{ième}}$ atome se met sous la forme :

$$\langle E_p \rangle = \frac{k}{4} (|u_{n+1} - u_n|^2 + |u_{n-1} - u_n|^2).$$

Q20. Grâce à la forme de l'onde et à la formule de dispersion obtenue précédemment, exprimer $\langle E_p \rangle$ en fonction de m , U_0 et de ω .

Q21. En déduire l'énergie interne du cristal en fonction de la température T .

I. 4 - Du discret au continu

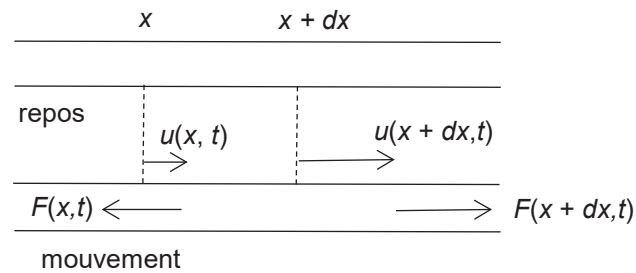


Figure 2 - Passage au continu

Q22. À partir de la relation de dispersion, exprimer la longueur d'onde λ de l'onde qui se propage en fonction de ω , ω_0 et de a .

Calculer λ pour des fréquences ultrasonores ($f = 500$ kHz). Commenter.

Q23. La comparaison de la longueur d'onde au paramètre a permet d'écrire $u_n(t) = u(x, t)$ (**figure 2**) et d'obtenir une équation de D'Alembert de la forme $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{k}{m} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$.

Calculer la célérité de l'onde dans le cristal pour des fréquences ultrasonores.

Sujet méca CCINP - Corrigé

1. $V(x) = V_0 \left(1 - e^{-a(x-x_0)} \right)^2$

position d'équilibre : $\frac{dV}{dx} = 0$

$$\frac{dV}{dx} = V_0 \cdot 2 \left(1 - e^{-a(x-x_0)} \right) \cdot a e^{-a(x-x_0)}$$

D'où $1 - e^{-a(x-x_0)} = 0 \Rightarrow x = x_0$. donc $x_{eq} = x_0$

2. On pose $\varepsilon = x - x_0$, alors $V(\varepsilon) = V_0 \left(1 - e^{-a\varepsilon} \right)^2$

DL 2^e ordre : $V(\varepsilon) \approx V_0 (a\varepsilon)^2$

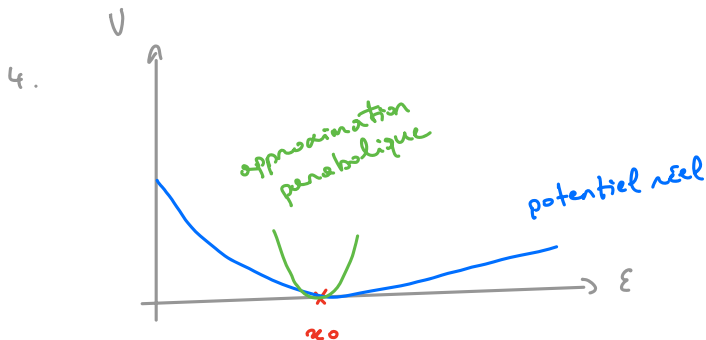
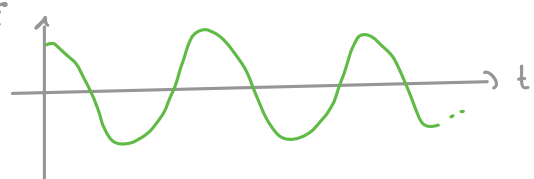
Donc $V(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} k \varepsilon^2$ avec $k = 2 V_0 a^2$

3. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 V_0 a^2}{m}}$

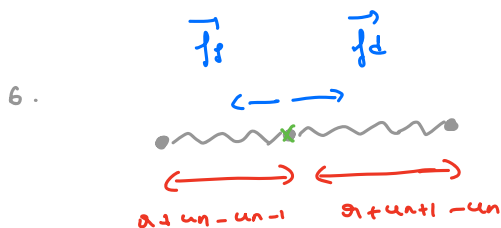
on peut le justifier rapidement : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} k \varepsilon^2 = c^ste$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = m \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} + k \varepsilon \dot{\varepsilon} = 0$, ce qui implique $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Solution $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega_0 t + \phi)$



5. $x_n(0) = n a$ donc $x_n(t) = x_n(t) - n a$



La n^{ième} masse subit 2 forces de rappel élastiques :

$$\vec{f}_s = -k \left(\underbrace{a + x_n - x_{n-1} - a}_{\text{distance entre } n \text{ et } n-1} \right) \vec{e}_x = -k(x_n - x_{n-1}) \vec{e}_x$$

$$\vec{f}_d = k \left(\underbrace{a + x_{n+1} - x_n - a}_{\text{distance entre } n \text{ et } n+1} \right) \vec{e}_x = k(x_{n+1} - x_n) \vec{e}_x$$

2^e loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{f}_s + \vec{f}_d$ avec $\vec{a} = \ddot{x}_n \vec{e}_x = \ddot{u}_n \vec{e}_x$

$$\text{D' où } m \ddot{u}_n = -k(u_n - u_{n-1}) \vec{e}_x + k(u_{n+1} - u_n) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \underline{m \ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)}$$

7. $\underline{u}_n(t) = u_0 e^{i(\omega t - qna)}$ oui, onde harmonique, u_0 = amplitude et ω = pulsation

8. $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t) \Rightarrow e^{-iqpa} = e^{-iqna} \Rightarrow e^{iqa(p-n)} = 1 \Rightarrow qa(p-n) = 0[2\pi]$

le + petit écart est pour $qa(p-n) = 2\pi$. Or, $\lambda = (p-n)a$

d'où $q\lambda = 2\pi \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{2\pi}{q}}$ q est le vecteur d'onde

9. $\underline{\ddot{u}_n} = \underline{u}_n(-\omega^2)$

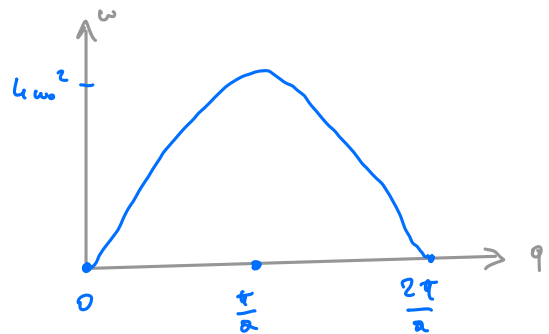
$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n e^{-iqa}$ et $\underline{u}_{n-1} = \underline{u}_n e^{iqa}$

D'où $-\omega^2 \underline{u}_n = \omega_0^2 \underline{u}_n (e^{-iqa} + e^{iqa} - 2)$

$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 (-2 \cos(qa) + 2) \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos(qa))$

on, $\cos(qa) = \cos(2 \frac{qa}{2}) = 1 - 2 \sin^2(\frac{qa}{2})$

$\Rightarrow \underline{\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(\frac{qa}{2})}$



10. $v_g = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$ rapport ω/k .

$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow$ pente de la tangente à la courbe

11. Oui, la propagation de ces ondes est dispersive.

$\sin^2 < 1$ donc nécessairement $\omega < 2\omega_0$ comportement passe bas

12. • $q \ll \frac{\pi}{a}$: $\frac{qa}{2} \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{qa}{2}\right)^2 = \omega_0^2 (qa)^2 \Rightarrow \omega = \omega_0 a q$ (relation linéaire)

alors $\underline{v_g = v_p = \omega_0 a}$

• $q = \frac{\pi}{a}$: $\frac{qa}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2\omega_0$ alors $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0}{\pi/a} \Rightarrow \underline{v_p = \frac{2a\omega_0}{\pi}}$

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ et en dérivant $2\omega \frac{d\omega}{dk} = 4\omega_0^2 \cdot 2 \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \cdot \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = 2 \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = 0$ car $\cos\left(\frac{ka}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $\underline{v_g = 0}$

onde stationnaire

13. premier terme répulsif (les atomes se repoussent si on veut trop les rapprocher)
second terme attractif (Van der Waals)

14. $\frac{dV}{dx} = -12 A x^{-13} + 6 B x^{-7} = 6 x^{-13} (-2 A + B x^6)$

$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0$ pour $x = a$ avec $a = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$

Donc $a^{12} = 4 \frac{A^2}{B^2}$ et $a^6 = \frac{2A}{B} \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x}\right)^6 = 4 \frac{A^2}{B^2} \frac{1}{x^{12}} - 4 \frac{A}{B} \frac{1}{x^6}$
 $= \frac{4A}{B^2} \left(\frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6} \right)$

Ainsi, $V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6} = \frac{B^2}{4A} \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x}\right)^6 \right)$

D'où $\Theta_0 = \frac{B^2}{4A}$ et $A = \frac{B a^6}{2} \Rightarrow \Theta_0 = \frac{B^2}{4} \cdot \frac{2}{B a^6} \Rightarrow \Theta_0 = \frac{B}{2 a^6}$

15. 1 $\rightarrow$ potentiel (la somme des 2 termes)
2 $\rightarrow$ terme en $1/x^{12}$
3 $\rightarrow$ terme en $1/x^6$

16. Au 2^e ordre, autour d'une position d'équilibre stable:

$V(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}(x_0) (x-x_0)^2$ (à une constante près)

Soit $V(x) = \frac{1}{2} k (x-x_0)^2$ avec $k = \frac{d^2V}{dx^2}(x_0)$

$\frac{d^2V}{dx^2} = \Theta_0 \left(a^{12} (-12)(-13) x^{-14} - 2 a^6 (-6)(-7) x^{-8} \right)$
 $= \Theta_0 \left(156 \frac{a^{12}}{x^{14}} - 84 \frac{a^6}{x^8} \right)$

donc $\frac{d^2V}{dx^2}(x=a) = \Theta_0 \cdot \frac{1}{a^2} (156 - 84) \quad \text{D'où} \quad k = \frac{72 \Theta_0}{a^2}$

17. A.N : $k = 29 \text{ N.m}^{-1}$ et $\omega_0 = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$; $(\omega t - \varphi_{na})$

18. $e_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 = \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2$ avec $\dot{u}_n = i \omega u_0 e$

d'où $\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} (\dot{u}_n \cdot \dot{u}_n^*) = \frac{m}{4} \omega^2 u_0^2$

D'où, pour N atomes : $\langle E_c \rangle = N \langle e_c \rangle \Rightarrow \langle E_c \rangle = \frac{N m \omega^2 u_0^2}{4}$

19. $e_p = \frac{1}{2} k (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{1}{2} k (u_n - u_{n-1})^2$

$\Rightarrow \langle e_p \rangle = \frac{1}{2} k \left(\langle (u_{n+1} - u_n)^2 \rangle + \langle (u_n - u_{n-1})^2 \rangle \right)$

Or, $\langle (u_{n+1} - u_n)^2 \rangle = \frac{1}{2} (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n) (\underline{u}_{n+1}^* - \underline{u}_n^*) = \frac{1}{2} |\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n|^2$

$$D' \text{ où } \langle \epsilon_p \rangle = \frac{\hbar}{4} \left(|\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n|^2 + |\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1}|^2 \right)$$

Remarque : petite erreur d'écriture, signe $\oplus$ au lieu de $\ominus$ au milieu de la formule et oubli de souligner les grandeurs complexes

$$\begin{aligned} 20. \quad \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n &= \underline{u}_n (e^{-i a q} - 1) \Rightarrow |\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n|^2 = u_0^2 |\cos(aq) - 1 - i \sin(aq)|^2 \\ \text{et } \underline{u}_n - \underline{u}_{n-1} &= \underline{u}_n (1 - e^{i a q}) \Rightarrow |\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1}|^2 = u_0^2 |1 - \cos(aq) - i \sin(aq)|^2 \\ &= \underbrace{(1 - \cos(aq))^2 + \sin^2(aq)}_{= 2 - 2 \cos(aq)} \\ &\quad \text{(pour les deux termes)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D' \text{ où } \langle \epsilon_p \rangle &= \frac{\hbar}{4} u_0^2 \cdot 2 (2 - 2 \cos(aq)) \\ &= \hbar u_0^2 \underbrace{(1 - \cos(aq))}_{2 \sin^2\left(\frac{aq}{2}\right)}, \text{ comme question 9.} \\ &= \hbar u_0^2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{aq}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \omega^2 = 4 \omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \quad (\text{relation de dispersion question 9})$$

$$\Rightarrow \langle \epsilon_p \rangle = \hbar u_0^2 \frac{\omega^2}{2 \omega_0^2} \quad \text{et } \frac{\hbar}{\omega_0^2} = m \quad \text{donc } \langle \epsilon_p \rangle = \frac{m \omega^2 u_0^2}{2} \quad (\text{ouf !})$$

$$\begin{aligned} 21. \quad U &= \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle \quad \text{avec } \langle E_p \rangle = N \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \langle \epsilon_p \rangle \quad \rightarrow \text{car sinon on compte 2 fois l'ep d'interaction de chaque couple d'atomes} \\ \Rightarrow U &= \frac{N m \omega^2 u_0^2}{4} + \frac{N m \omega^2 u_0^2}{4} \Rightarrow U = \frac{N m \omega^2 u_0^2}{2} \quad \text{en fonction de } T? \\ &\quad \text{avec l'équipartition de l'énergie? non n'est introduit...} \end{aligned}$$

$$22. \quad \lambda = \frac{2\pi}{q} \quad \text{et } \omega^2 = 4 \omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \Rightarrow \frac{qa}{2} = \arcsin\left(\frac{\omega^2}{4 \omega_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = 2\pi \cdot \frac{a}{2 \arcsin\left(\frac{\omega^2}{4 \omega_0^2}\right)} \quad \text{soit } \lambda = \frac{\pi a}{\arcsin\left(\frac{\omega^2}{4 \omega_0^2}\right)} \quad \text{A.N : } \lambda = 1,7 \text{ nm}$$

$\lambda \gg a$

$$\begin{aligned} 23. \quad u_n(t) &= u(x, t) \quad \text{et donc } u_{n+1}(t) = u(x+a, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 \\ \text{de même } u_{n-1}(t) &= u(x-a, t) = u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 \end{aligned}$$

$$D' \text{ où } u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{En reprenant l'équation de 26, on obtient : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c = a \omega_0 \quad \text{A.N : } c = 3,4 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$= \frac{\hbar}{m}$