

Corrigé de l'épreuve des Mines, Physique 1, MP, 2022

I Étude énergétique de l'anémomètre

I.A Bilan d'énergie dans le fil chaud

1. Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, où \vec{j} (A.m⁻²) est la densité de courant électrique, σ (S.m⁻¹) la conductivité électrique et \vec{E} (V.m⁻¹) le champ électrique.

Si on fait un bilan sur une section $S = \pi d_w^2/4$, on obtient, en notant $\vec{j} = j \vec{e}_x$,

$$I = Sj = S\sigma_w E \text{ (avec } \vec{E} = E \vec{e}_x \text{)}.$$

On en déduit $-\frac{dV}{dx} = \frac{I}{\sigma_w S}$, soit $U = V(0) - V(L_w) = \frac{IL_w}{\sigma_w S}$.

On obtient donc $R_w = \frac{4\rho_w L_w}{\pi d_w^2}$

On a donc $\mathcal{P}_j = R_w I^2 = \frac{4\rho_w L_w I^2}{\pi d_w^2}$, et donc

$$\mathcal{P}_v = \frac{\mathcal{P}_j}{L_w \pi d_w^2/4} = \frac{16\rho_w I^2}{\pi^2 d_w^4}.$$

(ceci pouvait aussi être obtenu par $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \rho_w j^2$).

2. Loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, où \vec{j}_{th} (W.m⁻²) est la densité de courant thermique, λ (W.m⁻¹.K⁻¹) est la conductance thermique, et T (K) la température.

Dire que c'est une loi phénoménologique revient à dire qu'il ne s'agit pas d'une loi fondamentale, mais d'une loi constituant une bonne approximation de la réalité dans des conditions ordinaires.

Si la température n'évolue que selon x , on a $\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$. \vec{j} est donc également selon x .

Dans le cas où seuls les transferts par conduction ont lieu, on peut, en faisant un bilan sur une longueur dx de fil, écrire :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi(x) - \Phi(x+dx) + \mathcal{P}_v S dx. \text{ (les notations sont les mêmes que sur le schéma de la question suivante)}$$

La capacité thermique du système vaut $dC = c_w dm = c_w \rho_w S dx$.

$$\text{On a donc } \frac{dU}{dt} = c_w \rho_w S dx \frac{\partial T}{\partial t}.$$

$$\text{Par ailleurs } \Phi(x) = j(x)S = -S\lambda_w \frac{\partial T}{\partial x}.$$

$$\text{Donc } \Phi(x) - \Phi(x+dx) = -\frac{d\Phi}{dx} dx = S\lambda_w dx \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

On peut donc conclure, après simplification par $S dx$,

$$c_w \rho_w \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathcal{P}_v.$$

3. L'unité de h est le W.m⁻².

h augmente avec V , ce qui conduit à une diminution de température, puisque les pertes thermiques sont alors plus élevées.

4. Avec les notations du schéma à droite, on fait le bilan, en régime permanent :

$$0 = \Phi(x) - \Phi(x + dx) - \Phi_e + \mathcal{P}_v S dx.$$

Le terme $\Phi(x) - \Phi(x + dx)$ s'exprime comme à la question précédente.

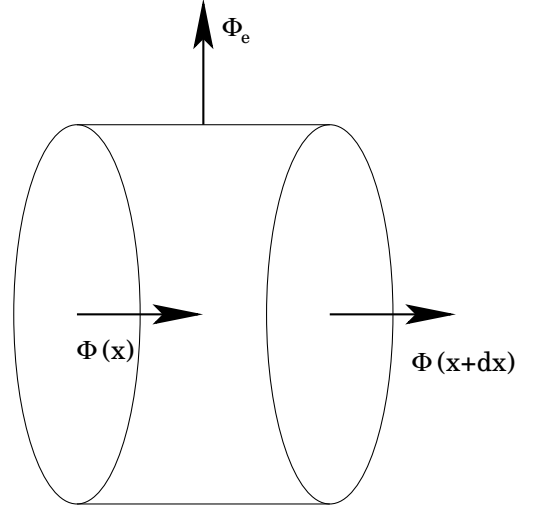
Par ailleurs $\Phi_e = h(T_w - T_f)\pi d_w dx$ (il faut utiliser la surface du cylindre extérieur).

On obtient donc :

$$0 = S \lambda_w dx \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} - h(T_w - T_f)\pi d_w dx + \mathcal{P}_v S dx.$$

On peut utiliser $S = \pi d^2/4$ et simplifier les $\pi d_w^2 dx/4$ pour obtenir :

$$0 = \lambda_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} - \frac{4h}{d_w} (T_w - T_f) + \mathcal{P}_v.$$



5. On a alors $\mathcal{P}_v = \frac{16\rho_f I^2}{\pi^2 d_w^4} (1 + \alpha T_1)$.

En remplaçant cela donne : $\lambda_w \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{4h}{d_w} T_1 - \frac{16\rho_f I^2}{\pi^2 d_w^4} (1 + \alpha T_1)$

En divisant par λ_w et en rassemblant les termes pertinents on a donc la forme demandée avec :

$$K_1 = \frac{4h}{d_w \lambda_w} - \frac{16\rho_f I^2 \alpha}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} \text{ et } K_2 = \frac{16\rho_f I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w}.$$

On a bien $K_1 = \frac{4h}{d_w \lambda_w} - \alpha K_2$.

La condition pour $K_1 < 0$ est $h < \frac{4\rho_f I^2 \alpha}{\pi^2 d_w^3}$

6. $R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi}$, où ΔT est la différence de température entre les deux extrémités de la résistance thermique et Φ le flux thermique (en W) traversant la résistance thermique. R_{th} s'exprime en $K.W^{-1}$.

Un contact sans résistance thermique impose des températures identiques des deux côtés du contact.

On a alors :

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{1}{l_c^2} T_1 = -K_2.$$

La solution particulière s'écrit $T_{1,p} = K_2 l_c^2$, et la solution de la solution homogène s'écrit $T_{1,h} = Ae^{x/l_c} + Be^{-x/l_c}$.

Donc $T_1(x) = K_2 l_c^2 + Ae^{x/l_c} + Be^{-x/l_c}$.

La situation thermique est invariante par inversion de l'axe x , on a donc $A = B$.

Donc $T_1(x) = K_2 l_c^2 + 2A \cosh \frac{x}{l_c}$.

De plus $T_1(L_w/2) = 0$, donc :

$$2A \cosh \frac{L_w}{2l_c} = -K_2 l_c^2.$$

$$\text{Soit } 2A = -\frac{K_2 l_c^2}{\cosh(L_w/2l_c)}.$$

Donc :

$$T_w(x) = T_f + K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{\cosh(x/l_c)}{\cosh(L_w/2l_c)}\right)$$

7. $\dot{Q}_g = -\Phi(-L_w/2) + \Phi(L_w/2) = 2\Phi(L_w/2)$ (par symétrie).

Soit $\dot{Q}_g = -\lambda S \frac{dT_w}{dx}(L_w/2)$.

Or $\frac{dT_w}{dx} = -K_2 l_c \frac{\sinh(x/l_c)}{\cosh(L_w/2l_c)}$.

Donc $\dot{Q}_g = \frac{\lambda \pi d_w^2 K_2 l_c}{4} \tanh \frac{L_w}{2l_c}$

8. $\langle T_w \rangle = \frac{1}{L_w} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} T(x) dx$.

En calculant l'intégrale, on obtient :

$$\langle T_w \rangle = T_f + K_2 l_c^2 - \frac{K_2 l_c^3}{L_w \cosh(L_w/2l_c)} [\sinh \frac{x}{l_c}]_{-L_w/2}^{L_w/2}$$

Soit :

$$\langle T_w \rangle = T_f + K_2 l_c^2 - \frac{2K_2 l_c^3}{L_w} \tanh(L_w/2l_c),$$

ce qui est bien le résultat demandé avec $\Lambda = \frac{2l_c}{L_w}$.

9. $l_c = 0,15$ mm, donc $k = \frac{L_w}{2l_c} = 4$. On peut considérer que $\cosh \frac{L_w}{2l_c} \gg 1$, et donc $T_{w,max} \simeq T_f + K_2 l_c^2$.
On a de même $\tanh(L_w/2l_c) \simeq 1$.

On peut donc écrire $\xi \simeq \frac{1}{1-2l_c/L_w} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3} = 1,33$.

C'est cohérent avec la figure puisqu'on est entre les courbes $k = 2$ et $k = 5$.

I.B Puissance thermique cédée au fluide

10. T_w est maximal en 0, ce qui n'est guère surprenant ; si $k \gg 1$, la température devient quasi-homogène sauf sur les bords du fil (sur une zone d'ordre l_c , ce qui est logique au vu de l'expression de T_w : il faut que le rapport des cosinus hyperboliques soit non négligeable pour que T_w varie significativement).

Si on a $k \gg 1$ ($L_w \gg 2l_c$), on peut considérer que $T_w \simeq T_f + K_2 l_c^2$ sauf sur les bords du fil.

11. Le seul terme qui dépende de la température dans l'expression de R est ρ , qui est supposé quasi-homogène dans l'approximation du fil long. On peut donc écrire :

$$R_{w,\infty} = R_f \frac{\rho_w}{\rho_f} = R_f (1 + \alpha(\langle T_w \rangle - T_f)).$$

(note : l'hypothèse du fil long n'est en fait pas nécessaire pour établir cette expression, mais c'est plus compliqué sans cette hypothèse, il faut intégrer la différentielle du potentiel dV d'un bout à l'autre du fil...)

12. Le bilan thermique sur l'ensemble du fil donne $\dot{Q}_j = \dot{Q}_f + \dot{Q}_g \simeq \dot{Q}_f$.

Or, si on intègre sur toute la surface du fil pour obtenir \dot{Q}_f , on obtient

$$\dot{Q}_j = h \pi d_w L_w (\langle T_w \rangle - T_f).$$

(Là non plus l'hypothèse du fil long n'est en fait pas nécessaire...)

L'énoncé manque ici de précision : une expression utilisant la résistance calculée à la question précédente et la loi d'Ohm répond techniquement à la question mais n'est sans doute pas ce qui était attendu puisque cela n'utilise pas les hypothèses sur les puissances thermiques.

13. $[Re] = \frac{ML^{-3}LT^{-1}L}{ML^{-1}T^{-1}L}$ (une pression est une force surfacique, de dimension $ML^{-1}T^{-2}$)

Re est donc sans dimension.

14. \mathcal{N}_u est également sans dimension au vu des dimensions de h et λ discutées en début d'énoncé.

Il compare l'efficacité du transport par convection (le terme en h) et par conduction (le terme en λ/d_w) sur une distance caractéristique d_w . Il augmente, comme h , avec V .

15. Dans le cadre d'un fil long, on a $\langle T_w \rangle = T_f + K_2 l_c^2$.

$$\text{Donc } l_c = \sqrt{\frac{\langle T_w \rangle - T_f}{K_2}} = \sqrt{\frac{(\langle T_w \rangle - T_f) \pi^2 d_w^4 \lambda_w}{16 \rho_f I^2}}.$$

On écrit $\langle T_w \rangle - T_f = \frac{\dot{Q}_j}{\pi h d_w L_w}$, et on met en facteur le terme $d_w/2$ souhaité :

$$l_c = \frac{d_w}{2} \sqrt{\frac{\dot{Q}_j \pi d_w \lambda_w}{4 \rho_f h L_w I^2}}.$$

Or $\dot{Q}_j = R_{w,\infty} I^2$, donc :

$$l_c = \frac{d_w}{2} \sqrt{\frac{R_{w,\infty} \pi d_w \lambda_w}{4 \rho_f h L_w}}.$$

Par ailleurs $R_f = \frac{4 \rho_f L_w}{\pi d_w^2}$, ce qui donne :

$$l_c = \frac{d_w}{2} \sqrt{\frac{R_{w,\infty} \lambda_w}{d_w h R_f}}$$

C'est bien le résultat recherché avec $\boxed{\nu = 1/2}$.

16. On a $\dot{Q}_f = \pi d_w \int_{x=-L_w/2}^{L_w/2} h(T_w - T_f) dx$, on retrouve donc le résultat :

$$\dot{Q}_f = \pi d_w L_w h (\langle T_w \rangle - T_f), \text{ soit :}$$

$$\dot{Q}_f = \pi d_w L_w K_2 l_c^2 h \left(1 - \frac{2l_c}{L_w} \tanh \frac{L_w}{2l_c}\right)$$

17. On reprend l'expression $\dot{Q}_g = \frac{\lambda_w \pi d_w^2 K_2 l_c}{4} \tanh \frac{L_w}{2l_c}$ calculée précédemment.

$$\text{On a donc } \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} = \frac{4 h l_c L_w}{d_w \lambda_w} \left(\frac{1}{\tanh(L_w/2l_c)} - \frac{2l_c}{L_w} \right).$$

Soit, en utilisant le nombre de Nusselt :

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} = \frac{4 N_u l_c L_w \lambda_f}{d_w^2 \lambda_w} \left(\frac{1}{\tanh(L_w/2l_c)} - \frac{2l_c}{L_w} \right)$$

Le terme entre parenthèses est d'ordre 1 pour un fil long, on a $l_c \sim d_w$ d'après l'hypothèse de θ d'ordre 1. On a donc :

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \sim \frac{4 N_u L_w \lambda_f}{l_c \lambda_w} = \frac{4 R_{w,\infty} L_w}{\theta R_f l_c}.$$

Le rapport des résistances est supérieur à 1, θ est d'ordre 1 et $L_w \gg l_c$. Le rapport des puissances est donc grand devant 1 : on peut donc bien négliger les pertes.

On a par ailleurs :

$$\dot{Q}_j = h \pi d_w L_w (\langle T_w \rangle - T_f) = R_{w,\infty} I^2.$$

$$\text{Or, } \langle T_w \rangle - T_f = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\rho_w}{\rho_f} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_{w,\infty}}{R_f} - 1 \right), \text{ et}$$

$$h = \frac{\lambda_f}{d_w} \left(A + B \sqrt{\frac{\mu_f V d_w}{\eta}} \right).$$

On obtient donc en remplaçant :

$$\lambda_f \left(A + B \sqrt{\frac{\mu_f V d_w}{\eta}} \right) \frac{\pi L_w}{\alpha} \left(\frac{R_{w,\infty}}{R_f} - 1 \right) = R_{w,\infty} I^2$$

Il ne reste qu'à extraire V :

$$A + B \sqrt{\frac{\mu_f V d_w}{\eta}} = \frac{R_{w,\infty} R_f \alpha I^2}{(R_{w,\infty} - R_f) \lambda_f \pi L_w}$$

Soit :

$$\boxed{V = \frac{\eta}{\mu_f d_w} \left(\frac{R_{w,\infty} R_f \alpha I^2}{(R_{w,\infty} - R_f) \lambda_f \pi L_w B} - \frac{A}{B} \right)^2}$$

II Anémométrie à deux fils

18. Il suffit de faire un bilan sur le fil, supposé isolé :

$$\frac{dU}{dt} = R_w I^2.$$

Soit $C \frac{dT_e}{dt} = R_f (1 + \alpha(T_e - T_f)) I^2$, où $\boxed{C = \mu_w c_w L_w \pi d_w^2 / 4}$ est la capacité calorifique du fil.

On peut le réécrire :

$$\frac{dT_e - T_f}{dt} - \frac{\alpha R_f I^2}{C} (T_e - T_f) = \frac{R_f I^2}{C}.$$

On a $\tau_1 = \frac{C}{\alpha R_f I^2}$.

19. La solution particulière pour $\theta = T_e - T_f$ vaut $\theta_p = -\frac{R_f \tau_1}{C} = -\frac{1}{\alpha}$.

Les solutions homogènes sont de la forme $\theta_g = Ae^{t/\tau_1}$.

On a donc : $\theta = -\frac{1}{\alpha} + Ae^{t/\tau_1}$.

On a donc $A = \frac{1}{\alpha}$ grâce aux conditions initiales, et donc :

$$T_e = T_f + \frac{1}{\alpha} (e^{t/\tau_1} - 1).$$

NB : Il est logique d'avoir une exponentielle croissante, car la puissance fournie augmente avec R et donc avec la température.

Donc :

$$\Delta T_{e,max} = \frac{1}{\alpha} (e^{\tau/\tau_1} - 1).$$

20. On a alors uniquement le flux thermique \dot{Q}_f qui refroidit le système, ce qui donne l'équation :

$$C \frac{dT_e}{dt} = -h L_w \pi d_w (T_e - T_f).$$

Soit :

$$c_w \mu_w L_w \frac{\pi d_w^2}{4} \frac{dT_e}{dt} = -\mathcal{N}_u L_w \pi \lambda_f (T_e - T_f).$$

Soit :

$$\tau_2 \frac{dT_e}{dt} + T_e = T_f, \text{ avec}$$

$$\tau_2 = \frac{c_w \mu_w d_w^2}{4 \mathcal{N}_u \lambda_f}.$$

21. Ces observations permettent de confirmer que les pertes par convection sont bien négligeables pendant cette phase (ce sont les seules qui dépendent de la vitesse).
22. L'analyse de ces courbes permet d'avoir accès à τ_2 (qui est l'inverse de la pente de ces droites, puisque $T_e = T_f + Ae^{-t/\tau_2}$), ce qui permet d'accéder à \mathcal{N}_u , seul paramètre variable, et donc à V .
23. L'allure de la courbe de l'émetteur est conforme à ce qui a été discuté aux questions précédentes. Pour ce qui est du récepteur, on peut remarquer :

- Que le maximum est décalé temporellement par rapport au maximum de l'émetteur, ce qui s'explique par le temps de parcours de l'air chaud, et, plus marginalement, par le fait que le récepteur démarre froid.
- Que la courbe est plus étalée temporellement que l'émetteur. Cela est dû à la non-homogénéité de la vitesse de déplacement de l'air (le flux de l'air étant perturbé par la présence des fils) et à la diffusion thermique dans l'air qui a aussi pour effet d'étaler le pic de température.
- Que le maximum est nettement plus faible : en effet l'air arrivant sur le second fil se sera mélangé (par convection ou diffusion) avec de l'air plus froid, il aura donc une température inférieure à celle du fil chaud ; par ailleurs l'équilibre du fil récepteur avec l'extérieur ne sera pas tout à fait réalisé (mais on ne doit pas en être très loin car le temps caractéristique du récepteur semble supérieur au temps caractéristique d'équilibrage avec l'air).

24. On a plusieurs options pour estimer la vitesse :

- Tout simplement, regarder le décalage temporel entre le début des deux pics, ce qui donne $v = \frac{\epsilon}{t_{tra_j}}$.
- On peut également étudier l'allure des pics du récepteur : ces pics sont en effet d'autant plus longs que la vitesse est faible. On peut envisager deux raisons à cela : tout d'abord, l'impulsion de l'émetteur est d'autant plus longue que la vitesse est faible, mais ce temps ne semble pas être

dominant dans la durée du pic du récepteur. D'autre part, on peut envisager que le nuage d'air chaud aie eu plus de temps pour s'élargir dans le cas d'une faible vitesse, ce qui peut également expliquer la durée plus grande du pulse. Quantitativement, la durée Δt_r caractéristique du pic du récepteur semble varier en $\sqrt{t_{tra_j}}$: ce serait compatible avec un étalement du nuage par diffusion. La mesure de ce Δt_r pourrait donc également donner une mesure de v .

Note : le zéro des courbes de droite semble être différent du zéro des courbes de gauche, ce qui aurait du être précisé dans l'énoncé.