Mines-Ponts 2022 PC Physique 1

1) - Loi de gravitation de Newton: $\boxed{\vec{F}_B=-\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)^2}\vec{e}_r=-\vec{F}_A}$.

Et ce en supposant que $\vec{F}_B$ désigne la force subie par B et pas celle exercée par B: notations ambiguës.

- Travail élémentaire des forces de gravitation: $\delta W=\vec{F}_B d\vec{B}+\vec{F}_A d\vec{A}=\vec{F}_B d\overrightarrow{AB}=-\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)^2}d(2r)=-dE_P$ avec $\boxed{E_P=-\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)}}$

2) - On applique le théorème de la quantité de mouvement à l'étoile B, en mouvement circulaire uniforme: $-Mr\dot{\theta}^2=-\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)^2}$ d'où $\dot{\theta}^2=\frac{\mathcal{G}M}{4r^3}=(\frac{2\pi}{T_1})^2$ et donc $\boxed{T_1=\sqrt{\frac{16\pi^2r^3}{\mathcal{G}M}}}$.

- Application numérique: $2r=1\,UA$, $M=M_\odot$. Pour la Terre en orbite autour du soleil, la 3éme loi de Kepler s'écrit $\frac{(1\,UA)^3}{1\,an^2}=\frac{\mathcal{G}M_\odot}{4\pi^2}$. Donc $\frac{T_1}{1\,an}=\sqrt{\frac{16\pi^2(1\,UA)^3}{\mathcal{G}M_\odot 8(1\,an)^2}}=\sqrt{4/8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}71$, soit $\boxed{T_1\approx 0{,}71\,an}$

3) Énergie mécanique: $E=\frac{1}{2}M(r\dot{\theta})^2.2+E_P=Mr^2\frac{\mathcal{G}M}{4r^3}-\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)}$, soit $\boxed{E=-\frac{\mathcal{G}M^2}{4r}}$.

L'énergie mécanique est négative, état lié.

4) Force subie par B: $\boxed{\vec{F}_B=-\frac{\mathcal{G}m_Am_B}{R^3}\vec{R}=-\vec{F}_A}$ indépendante du référentiel.

5) Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système des deux étoiles, isolé, dans le référentiel galiléen (Ωxyz) s'écrit: $(m_A+m_B)\frac{d^2\overrightarrow{\Omega G}}{dt^2}=\vec{0}$: G est donc, dans (Ωxyz) , en mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel $(Gxyz)$ est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à (Ωxyz) galiléen, il est donc lui-même galiléen.

6) - Par définition du barycentre G , on a $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. On en déduit immédiatement que $\boxed{\overrightarrow{GB}=\frac{m_A}{m_A+m_B}\vec{R}}$ et que $\boxed{\overrightarrow{GA}=-\frac{m_B}{m_A+m_B}\vec{R}}$.

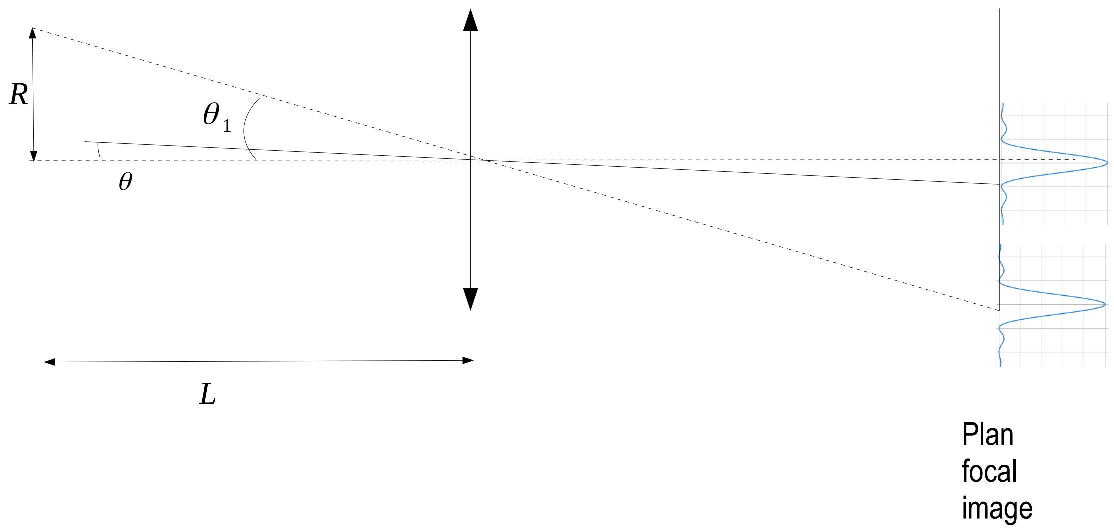
- Le théorème de la quantité de mouvement appliqué successivement aux étoiles A et B dans $(Gxyz)$ galiléen donne:

$$\begin{cases} m_A \dfrac{d^2\overrightarrow{GA}}{dt^2} = \vec{F}_A \\ m_B \dfrac{d^2\overrightarrow{GB}}{dt^2} = \vec{F}_B \end{cases}$$. Donc $\dfrac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) = \vec{F}_B(\dfrac{1}{m_B} + \dfrac{1}{m_A})$, d'où $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -\mathcal{G}(m_A + m_B)\dfrac{\vec{R}}{R^3}$, qui est bien de la forme $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -K\dfrac{\vec{R}}{R^n}$ avec $\boxed{n=3}$ et $\boxed{K = \mathcal{G}(m_A + m_B)}$.

7) Soit P le point tel que $\overrightarrow{GP} = \vec{R}$. Supposons que P est en mouvement circulaire uniforme dans $(Gxyz)$. Son accélération vaut alors $-R\dot{\theta}^2\vec{e}_R$, et la relation de la question précédente donne alors $\dot{\theta}^2 = \dfrac{\mathcal{G}(m_A + m_B)}{R^3}$, d'où l'on tire la période $\boxed{T_2 = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 R^3}{\mathcal{G}(m_A + m_B)}}}$.

Question peu claire: l'énoncé suppose R variable, donc le cas elliptique: or la démonstration de la 3éme loi n'est pas au programme dans le cas elliptique. Et pour justifier le caractère périodique, faut-il introduire le mobile réduit (pas au programme) ?

8) Pour que les deux images soient séparées, il faut que la distance entre les centres des tâches de diffraction des deux étoiles soit plus grande que la demi-largeur de chacune des taches (critère de Rayleigh):

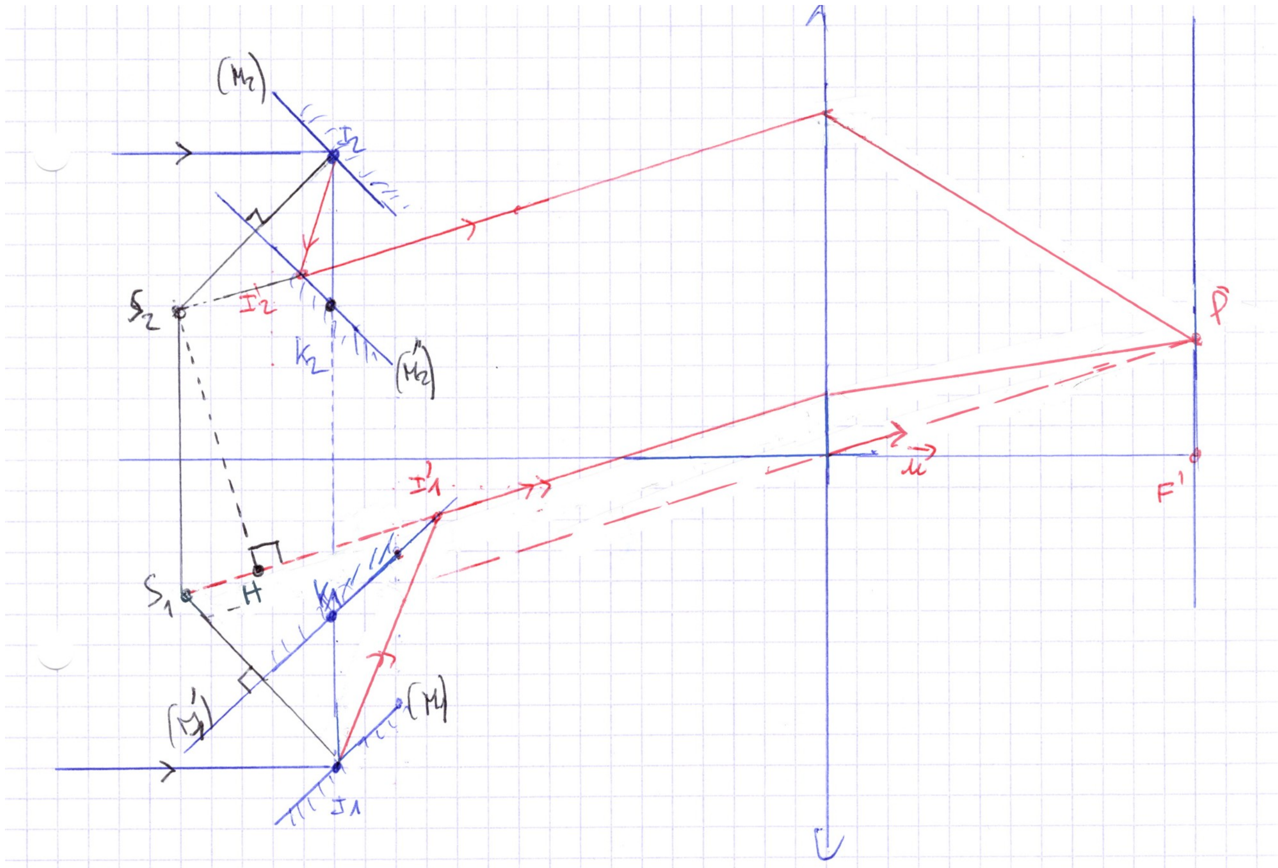


Si on note θ_1 la distance angulaire entre les deux étoiles, il faut donc que $\sin\theta_1 > \sin\theta \approx \dfrac{\lambda_0}{d}$. Or en supposant les angles petits, $\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \dfrac{R}{L}$. Il faut donc que $\dfrac{R}{L} > \dfrac{\lambda_0}{d}$, soit $\boxed{L < L_{max} = \dfrac{dR}{\lambda_0}}$.

A.N.: $L_{max} = 143\ AL$.

Critère de Rayleigh pas au programme...

9) - Théorème de Malus: après un nombre quelconque de réflexions et/ou de réfractions (en nombre et nature identiques pour tous les rayons), les surface d'onde issues d'une source ponctuelle sont perpendiculaires aux rayons lumineux.



S_2 est l'image de I_2 par réflexion sur (M'_2) , S_1 est l'image de I_1 par réflexion sur (M'_1)
Construction effectuée dans l'ordre suivant:
- on choisit arbitrairement I'_2 , point de réflexion sur (M'_2) ; la direction $S_2I'_2$ donne alors la direction des rayons avant traversée de la lentille
- le rayon parallèle à $(S_2I'_2)$ (de vecteur unitaire $\vec{u}$) et passant par le centre optique de la lentille, non dévié, donne le point P
- le rayon parallèle à $(S_2I'_2)$ et passant par S_1 donne le point I'_1

On a $I_1I'_1=I_1S_1$ et $I_2I'_2=I_2S_2$, ainsi que $(AI_1)=(AI_2)$, donc $\delta_A=(I_1I'_1P)-(I_2I'_2P)=(S_1I'_1P)-(S_2I'_2P)$.

Or d'après le théorème de Malus "à rebours", les rayons $S_2I'_2$ et $S_1I'_1$ étant parallèles entre eux, S_2 et H appartiennent à un plan d'onde issu de P : $(S_2P)=(HP)$.

Donc: $\delta_A=S_1H=\overrightarrow{S_1S_2}.\vec{u}=a\vec{e}_x\dfrac{\overrightarrow{O_LP}}{O_LP}$ où O_L est le centre optique de la lentille. Dans l'approximation de Gauss, $O_LP\approx f'$, donc finalement $\boxed{\delta_A=\dfrac{ax}{f'}}$.

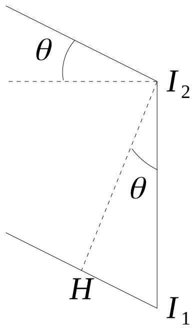
- Question: on tient compte de la diffraction par (M_1) et (M_2) mais pourquoi ne tient-on pas compte de celle par (M'_1) et (M'_2) ?

- La frange brillante d'ordre p a une abscisse x_p telle que $\delta_A=p\lambda_0=\dfrac{ax_p}{f'}$, d'où $x_p=\dfrac{p\lambda_0f'}{a}$.
L'interfrange vaut donc $\boxed{i=x_{p+1}-x_p=\dfrac{\lambda_0f'}{a}}$. A.N.: $i=7{,}3\,\mu m$: non visible à l'œil nu, il faut probablement une loupe pour l'observer.

10) Formule de Fresnel: $\boxed{I_A(P)=2I_{0A}(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{f'}))}$.

Résultat discutable: il ne tient pas compte du caractère non isotrope de la diffraction par les miroirs. De plus, I_{0A} est l'intensité "issue de A et parvenant sur un des miroirs", mais probablement pas celle qui arriverait en F' en occultant une des deux voies de l'interféromètre.

11) - Les deux étoiles sont deux sources distinctes, elles ne sont pas cohérentes entre elles: il faudra donc sommer l'intensité issue de A et celle issue de B.



D'après le théorème de Malus, $(BI_2)=(BH)$. On a donc $(BI_1)-(BI_2)=HI_1=I_1I_2\sin\theta=b\sin\theta$.

Donc, $\boxed{\delta_B=\delta_A+b\sin\theta}$.

12) On somme les intensités, chacune donnée par la formule de Fresnel: $I(P)=2I_{0A}(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_A))+2I_{0B}(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}(\delta_A+b\sin\theta)))$.

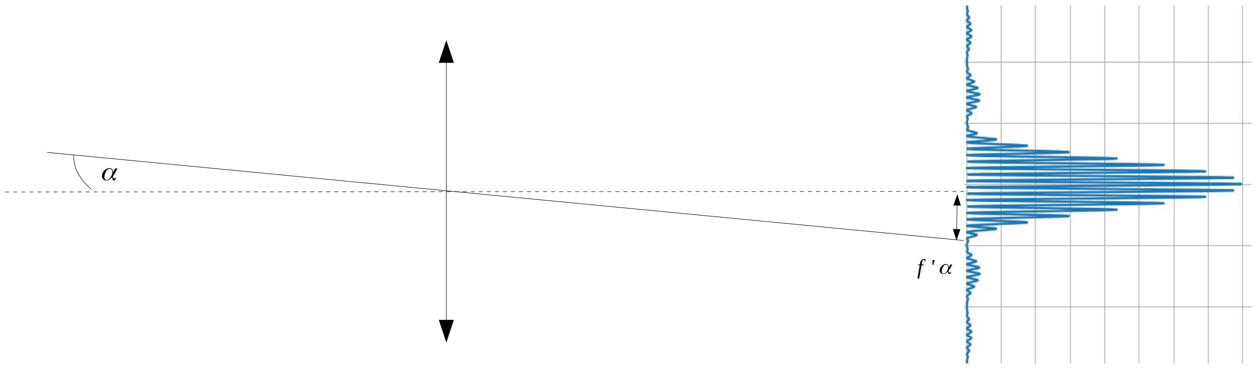
Avec la formule de l'énoncé, elle se met sous la forme: $I(P)=2(I_{0A}+I_{0B})+a\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}(\frac{ax}{f'}+\frac{b}{2}\sin\theta)+\varphi)$ avec $a=2(I_{0A}+I_{0B})\sqrt{1-m^2\sin^2(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda_0})}$ et $\boxed{m=2\frac{\sqrt{I_{0A}I_{0B}}}{I_{0A}+I_{0B}}}$.

On a donc encore: $I(P)=2(I_{0A}+I_{0B})(1+\sqrt{1-m^2\sin^2(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda_0})}\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}(\frac{ax}{f'}+\frac{b}{2}\sin\theta)+\varphi))$, qui est bien de la forme $I(P)=K(1+\cos(2\pi\frac{x-x_0}{\Delta x})V(\theta))$ avec $\boxed{K=2(I_{0A}+I_{0B})}$, $\boxed{\Delta x=\frac{\lambda_0 f'}{a}}$ et $\boxed{V(\theta)=\sqrt{1-m^2\sin^2(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda_0})}}$.

13) - x_0 est l'abscisse de la frange centrale, Δx est l'interfrange. $V(\theta)$ est le facteur de visibilité.
- On part d'une valeur de b suffisamment faible pour que $V(\theta)\approx 1$: les franges sont bien contrastées.
- On augmente progressivement la valeur de b, $V(\theta)$ diminue. Le contraste passe par un minimum pour $\sin^2(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda_0})=0$, donc pour $\boxed{\sin\theta=\frac{\lambda_0}{b}}$.
- S'il s'agit d'un vrai système binaire, l'angle θ varie au cours du temps. Mais si la période de rotation est très longue, il faut un suivi sur une durée équivalente pour s'en rendre compte...

14) S'agit-il d'une limitation par la diffraction (franges sous le pic central de diffraction) ? Ou par échappement géométrique des rayons diffractés par (M_i) sur les bords de (M'_i) ? Et dans ce cas, ne faut-il pas la valeur de $b-a$ pour répondre ?

Supposons que le facteur limitant soit la diffraction, et que donc on veut avoir 10 franges sur la demi-largeur du pic de diffraction, dont la valeur angulaire est $\sin\alpha \approx \frac{\lambda_0}{\ell}$:



Il faut donc qu'on ait $\alpha f' > 10 i$, soit $\frac{\lambda_0 f'}{\ell} > 10 \frac{\lambda_0 f'}{a}$, donc $\ell < a/10 = 25\,cm$.

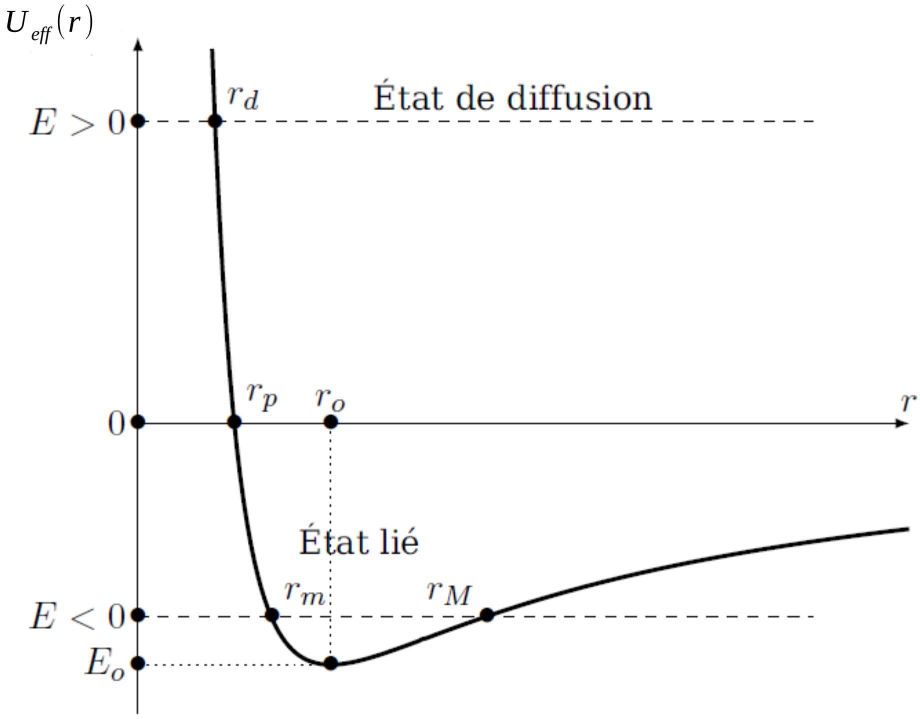
15) - L'électron subit la force centrale $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 OM^3}\overrightarrow{OM}$. D'après le théorème du moment cinétique (en O fixe), $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, le moment cinétique $\vec{\sigma}$ est donc constant.

Le plan contenant O et orthogonal à $\vec{\sigma}$ est donc un plan fixe. Or $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{OM}$ et à la vitesse $\vec{v}$, ces deux vecteurs sont donc dans le plan fixe suscité, le mouvement est plan.

- On peut alors travailler en coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, et donc $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v} = m_e r^2 \dot{\theta}\vec{e}_z$. On a donc $\boxed{\sigma = m_e r^2 \dot{\theta}}$.

16) La force coulombienne dérive de $E_P = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}m_e(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{m_e r^2}$. On a donc conservation de l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$ avec $\boxed{U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$.

17)



Lorsque $U_{eff}(r)$ est minimale, une seule valeur de r est possible, la trajectoire est circulaire.

Le rayon de cette trajectoire s'obtient donc par: $\left(\frac{dU_{eff}(r)}{dr}\right)_{r=r_0}=0$, ce qui donne $\boxed{r_0=\frac{4\pi\epsilon_0\sigma^2}{m_e e^2}}$. On reporte dans l'expression de l'énergie mécanique et on obtient $\boxed{E_0=-\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\sigma^2}}$. On omettra l'indice 0 dans la suite.

18) Le photon emporte la différence d'énergie entre les deux niveaux: $\Delta E=h\nu_0=\frac{hc}{\lambda_0}=\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)$ d'où $\boxed{\lambda_0=\frac{288\epsilon_0^2 h^3 c}{5m_e e^4}}$.

19) $\alpha=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{r}{\hbar c}$. Or $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ est une énergie. $\hbar$ est un moment cinétique (règle de quantification de Bohr), donc $\frac{\hbar}{r}$ est une quantité de mouvement, et $\frac{\hbar c}{r}$ est donc une énergie. La constante de structure fine est donc sans dimension.

$$\alpha\approx 7{,}3.10^{-3}\approx\frac{1}{137}$$

20) $E=mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-(1/2)}\approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$. On a donc bien $E=E_0+\kappa v^2+\mu v^4$ avec $E_0=mc^2$ qui est l'énergie de masse, $\kappa=\frac{m}{2}$ (κv^2 est l'énergie cinétique non relativiste) et $\mu=\frac{3}{8}\frac{m}{c^2}$.

21) Question pas du tout guidée. Traitée hors des 3h et avec apport d'un collègue. Méthode approchée, à quel point...?

- D'après la question et la règle de quantification de Bohr $\sigma = n\hbar$, l'énergie du niveau n vaut, dans le cas non relativiste $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2}$. En outre, l'orbite étant circulaire, le principe fondamental donne, toujours dans le cas classique, $m_e\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ et donc $E_c = -\dfrac{1}{2}E_p$, donc $E = -E_c$. Donc finalement, on a dans le cas classique $v^2 = \dfrac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2} = \dfrac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2}$.

- On injecte alors cette expression classique (qui est donc approchée dans le cas relativiste, mais à quel ordre ?) dans l'énergie relativiste développée à l'ordre 4:

$$\Delta E_{relat} = \kappa\,\Delta(v^2) + \mu\,\Delta(v^4) = \Delta E + \mu\left(\frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}\right)^2 \Delta\left(\frac{1}{n^4}\right) = \Delta E + \mu\left(\frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}\right)^2 \frac{65}{1296}.$$

Donc $\dfrac{\Delta E_{relar} - \Delta E}{\Delta E} = \dfrac{\dfrac{3}{8}\dfrac{m_e}{c^2}\left(\dfrac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}\right)^2\dfrac{65}{1296}}{\dfrac{5}{36}\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}} = \dfrac{13}{12}\dfrac{e^4}{\epsilon_0^2 h^2 c^2} = \dfrac{13}{3}\alpha^2 \sim \alpha^p$ avec $p=2$.

Elle est donc de l'ordre de 10^{-4}

22) - La face réfléchissante de (S) est la face 1.
- La compensatrice (C) permet d'avoir le même nombre de traversées de lame (ici 3) pour les deux rayons. En son absence, le rayon se réfléchissant sur (M_f) effectuerait une traversée de lame, tandis que l'autre en effectuerait 2: il y aurait une différence de marche supplémentaire, fonction en plus de la longueur d'onde si le verre est dispersif.

23) Michelson réglé en lame d'air, avec source étendue: on obtient des franges d'égale inclinaison, localisées à l'infini, et généralement ramenées à distance finie en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.

24) On se place donc au centre des anneaux. La différence de marche vaut donc simplement $\delta = 2e$ où e est l'épaisseur de la lame d'air équivalente, qui vaut donc ici $v.t$. On a donc $\delta(t) = 2.v.t$.

La formule de Fresnel donne alors $\boxed{I(t) = 2I_0\left(1+\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_0}2.v.t\right)\right)}$

25) - Les deux raies sont incohérentes entre elles, on somme les intensités:

$$I(t) = 2I_1\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}2.v.t\right)\right) + 2I_2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}2.v.t\right)\right).$$

On obtient donc avec la formule de l'énoncé: $I(t) = 2(I_1+I_2) + a\cos\left(2\pi v t\left(\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}\right)+\varphi\right)$ avec $a = 2(I_1+I_2)\sqrt{1-m^2\sin^2\left(2\pi v t\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)\right)}$ et $\boxed{m = 2\dfrac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}}$. Soit encore $I(t) = 2(I_1+I_2)\left(1+C(t)\cos\left(2\pi v t\left(\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}\right)+\varphi\right)\right)$ avec $C(t) = \sqrt{1-m^2\sin^2\left(2\pi v t\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)\right)}$.

Or $\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2} \approx \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$. Donc: $\boxed{C(t) = \sqrt{1-\dfrac{4I_1I_2}{(I_1+I_2)^2}\sin^2\left(2\pi v t\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)}}$

- On a donc $\boxed{C_{max}=1}$ et $\boxed{C_{min}=\sqrt{1-\frac{4 I_1 I_2}{(I_1+I_2)^2}}=\frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}}$.

26) On a donc $C_{min}=0{,}15=\frac{1-I_2/I_1}{1+I_2/I_1}$, d'où $\boxed{\frac{I_2}{I_1}=\frac{1-C_{min}}{1+C_{min}}=0{,}74}$.

Le premier minimum du contraste se produit lorsque $2\pi\,\Delta x\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}=\frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\frac{\lambda_0}{4\,\Delta x}=1{,}9.10^{-5}}$.