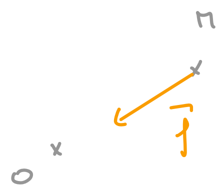
DS 7 - Correction pb 3

1. $f = \dfrac{G\, m_1 m_2}{r^2}$ donc $G = \dfrac{\overbrace{f \cdot r^2}^{kg.m.s^{-2}\ m^2}}{\underbrace{m_1 m_2}_{kg^2}}$ G est en $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$ (dimension $M^{-1} L^3 T^{-2}$)

2.



$\vec{f}$ est centrale, colinéaire à $\vec{OM}$, donc $\vec{M_O}(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$

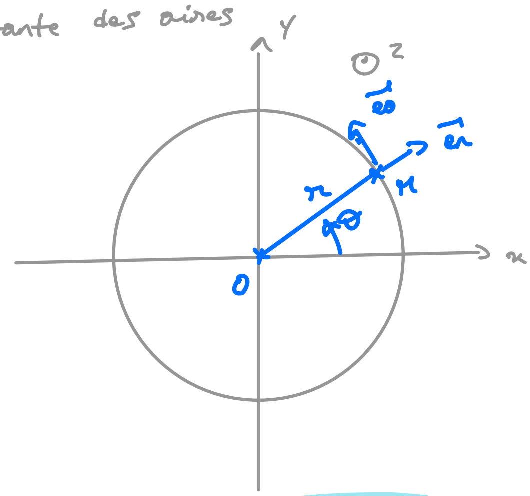
comme $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}(\vec{f})$ (th du moment cinétique), alors

$\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{0}$ et donc $\vec{L_O} = c^{ste}$

3. • $\vec{L_O} = m\, \vec{OM} \wedge \vec{v}$ donc $\vec{OM} \perp \vec{L_O}$ => trajectoire dans le plan $\perp$ $\vec{L_O}$ et qui contient O : mvt plan

• $\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ en polaires donc $\vec{L_O} = m r^2 \dot{\theta}\, \vec{e_z}$

D'où $L_O = m r^2 \dot{\theta}$ => $C = r^2\dot{\theta} = \dfrac{L_O}{m}$: constante des aires



4. On utilise simplement la 2° loi de Newton :

$m\vec{a} = \vec{f}$ avec $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ ($r = c^{st}$)

et $\vec{f} = \dfrac{-G M_S m}{r^2}\,\vec{e_r}$

On projette sur $\vec{e_r}$: $-m r \dot{\theta}^2 = -\dfrac{G M_S m}{r^2}$

=> $r\dot{\theta}^2 = \dfrac{G M_S}{r^2}$

Or, $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ => $v^2 = r^2\dot{\theta}^2$ => $v^2 = \dfrac{G M_S}{r}$ et donc $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G M_S}{r}}}$

A.N : $v_T = 2{,}98 \cdot 10^4$ m/s et $v_M = 2{,}42 \cdot 10^4$ m/s

5. $e_m = e_c + e_p = \dfrac{1}{2} m v^2 - \dfrac{G m M_S}{r}$ et $m v^2 = \dfrac{G M_S m}{r}$ d'après ce qui précède

D'où $e_m = \dfrac{G M_S m}{r}(1/2 - 1)$ => $\boxed{e_m = -\dfrac{G M_S m}{2r}}$

6. $2\pi r = v \cdot T$ (vitesse constante sur la trajectoire circulaire)

=> $4\pi^2 r^2 = v^2 T^2$ et $v^2 = \dfrac{G M_S}{r}$ => $4\pi^2 r^2 = \dfrac{G M_S}{r} T^2$ => $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G M_S}}$

7.

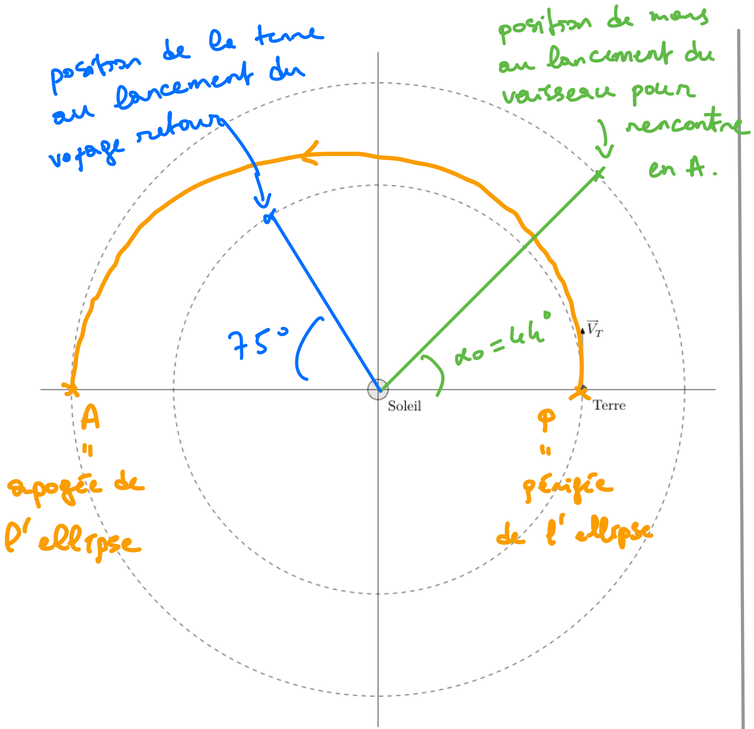


Figure A

8. Au point P sur l'orbite circulaire : $v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{a_T}}$

Au point P sur l'orbite elliptique : $e_m = e_c + e_p$

avec $e_m = -\frac{GM_S m}{2a}$

où $a = \frac{a_T + a_M}{2}$ est le 1/2 grand axe de l'ellipse de transfert.

D'où $-\frac{GM_S m}{a_T + a_M} = \frac{1}{2} m v_T'^2 - \frac{GM_S m}{a_T}$

$\Rightarrow v_T'^2 = 2GM_S\left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M}\right) = 2\overbrace{\frac{GM_S}{a_T}}^{v_T^2}\left(1 - \frac{a_T}{a_T + a_M}\right)$

$\Rightarrow \boxed{v_T' = v_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}}}$

et $\Delta v_T = v_T' - v_T \Rightarrow \Delta v_T = v_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1\right)$ A.N : $\Delta v_T = 2,93 . 10^3\ m.s^{-1}$

9. Le temps de transfert est la moitié du temps pour parcourir une ellipse complète,

donc $\Delta t = T/2 \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_S}}}$ en utilisant la 3° loi de Kepler, avec $a = \frac{a_T + a_M}{2}$

A.N : $\Delta t = 2,23 . 10^7\ s \simeq 259$ jours

10. Pendant que le vaisseau parcourt angulairement 180°, mars parcourt $360 . \frac{\Delta t}{T_M} \simeq 136°$, il faut donc que mars ait initialement une "avance" de $180 - 136 = 44°$. Donc $\boxed{\alpha_0 = 44°}$ (figure avec question 7)

11. Pendant $2\Delta t$, la terre parcourt angulairement $\frac{360 . 2\Delta t}{T_T} = 511°$

Donc une révolution complète plus environ 151°. Le vaisseau ne revient pas sur la terre ...

12. Même principe que pour la question 10 ...

Pendant Δt, la terre parcourt angulairement $\frac{360 . \Delta t}{T_T} = 255°$

$255 - 180 = 75°$: il faut que la terre ait initialement un "retard" de 75°.

↳ illustration sur dessin question 7

13. Lorsque le vaisseau arrive sur mars, la position angulaire de la terre est en avance de 75° sur mars. Il faut repartir avec un retard de 75°, c'est à dire que pendant le temps τ passé sur mars la terre doit parcourir angulairement $360 - 2 \times 75 = 210°$. Or, $\omega_{terre/mars} = \omega_{terre} - \omega_{mars} = \frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M} = 2\pi\frac{T_M - T_T}{T_T T_M}$

et $\omega_{terre/mars} \times \tau = \frac{210}{360} . 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{210}{360} . \frac{T_T T_M}{T_M - T_T}$

A.N : $\tau = 454$ jours

et il faut ajouter $2\Delta t$ pour la durée totale de la mission ...