Refroidissement par désaimantation adiabatique

Le refroidissement par désaimantation magnétique est une technique assez ancienne puisque les premières expériences ont été présentées en 1933, découlant de théorie proposée par Debye (1926) et Giauque (1927). Elle connaît actuellement un regain d'intérêt dans le domaine spatial. L'atténuation du bruit thermique sur les capteurs des satellites nécessite en effet des températures extrêmement basses qui doivent être obtenues dans un milieu en apesanteur et avec un dispositif le plus léger possible. La technique de refroidissement par effet magnétocalorique ne nécessite pas de compresseur, elle est donc compatible avec l'absence de pesanteur. La capacité thermique importante permet de réduire la masse du dispositif. La température de refroidissement attendue est de l'ordre de 50mK.

L'aimantation, notée $\vec{M}$, est une grandeur intensive définie comme la densité volumique de moment dipolaire magnétique. Il s'agit donc du moment dipolaire magnétique moyen par unité de volume.

Le dispositif de refroidissement comporte un premier étage de refroidissement à adsorption qui amène l'étage de désaimantation magnétique à la température de 350mK. *Le réfrigérant utilisé pour la désaimantation est un sel d'alun de chrome de formule* $\mathrm{KCr}\left(\mathrm{SO}_4\right)_2$ *qui est paramagnétique. Les ions présentent un moment magnétique orbital principalement d'origine électronique. En présence d'un champ extérieur, le sel présente une aimantation que l'on cherche à exprimer.*

1. Considérons une spire de courant circulaire, traversée par l'intensité I, dont la surface est notée S. Son vecteur surface $\vec{S}$ est orienté par $\widehat{u}$ vecteur unitaire normal. Le moment magnétique associé est défini par $\vec{\mu} = I\vec{S}$ avec $\vec{S} = S\widehat{u}$. Plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, le circuit subit une action qui tend à aligner le moment magnétique avec le champ magnétique. Cette action se traduit par un couple de force $\vec{\mu} \wedge \vec{B}$. Montrez qu'il existe deux positions d'équilibre et indiquer leur stabilité. Tracez succinctement le graphe de l'énergie potentielle magnétique $E_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ en fonction de l'angle entre les deux vecteurs qui la définissent. Retrouvons-nous les positions d'équilibre et leur stabilité ?

Dans le cadre du modèle semi-classique de Bohr, nous considérons un électron, de masse m et de charge $q = -e$, en orbite circulaire uniforme de rayon r autour d'un noyau. Le moment cinétique de cet électron $\vec{L} = \vec{r} \wedge m_e\vec{v}$ est quantifié, sa norme valant $L = p\hbar$ où $\hbar$ est la constante de Planck réduite et $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Exprimez la norme du moment cinétique en fonction notamment des normes de $\vec{r}$ et $\vec{v}$. En remarquant que l'électron effectue un tour en une période τ, exprimez l'intensité électrique correspondant à ce circuit élémentaire en fonction de e et des normes de $\vec{r}$ et $\vec{v}$. Déduisez-en l'expression du moment magnétique. Montrez alors que le moment magnétique est colinéaire au moment cinétique. Déduisez-en que sa norme μ est aussi quantifiée $\mu = p\mu_B$ et exprimez la constante μ_B appelée magnéton de Bohr en fonction de e, m_e et $\hbar$. Calculez avec un seul chiffre significatif la valeur numérique de μ_B.

Les sels ioniques d'alun présentent un moment magnétique permanent dont l'orientation est aléatoire. En présence d'un champ magnétique extérieur, ce moment magnétique tend à s'orienter selon le champ. Notons Oz l'axe du champ magnétique, soit $\vec{B} = B\widehat{u}_z$. L'énergie potentielle fait intervenir la projection du moment magnétique selon Oz qui est elle-même quantifiée. Ainsi l'état quantique du nuage électronique d'un ion dans un champ magnétique est défini par 4 nombres quantiques (n, ℓ, m, k).

Le nombre k est entier si m est entier ou demi-entier si m est demi-entier. Il peut prendre l'une quelconque des valeurs de l'ensemble $\mathbb{M}$ tel que :

$$k \in \mathbb{M} = \left[\begin{array}{ll} \{-m, -m+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, m-1, m\} & \textit{si } m \textit{ est entier} \\ \left\{-m, -m+1, \cdots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, m-1, m\right\} & \textit{si } m \textit{ est demi-entier} \end{array} \right.$$

L'énergie potentielle associée à cet état s'écrit $E_k = -kg\mu_B B$ où g est un facteur numérique, appelé facteur de Landé. Contrairement au ferromagnétisme, l'interaction entre les ions est négligeable. Nous considérons n^* ions du *sel d'alun par unité de volume dont nous cherchons à exprimer l'aimantation.*

3. En utilisant la distribution de probabilité de Boltzmann, montrez que la proportion P_k d'ions dans l'état E_k peut s'écrire sous la forme $P_k = \frac{\exp(kx)}{Z}$ où la quantité Z permet de normaliser la distribution, et dans laquelle on exprimera x en fonction de g, μ_B, B, k_B et T.

4. Exprimez Z en fonction de x et des k. Montrez que Z peut s'écrire comme la somme des premiers termes d'une suite géométrique. Déduisez-en l'expression de Z sous la forme d'un rapport de deux sinus hyperboliques. La fonction Z est appelée fonction de partition.

5. La projection du moment magnétique selon l'axe Oz vaut $\mu_z = kg\mu_B$, exprimez sa moyenne $\langle \mu_z \rangle$ dans la distribution dipolaire en fonction de g, μ_B et des proportions P_k, puis en fonction de la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(Z)] = \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}$. Comme les composantes du moment magnétique selon les autres axes sont nulles en moyenne (pas de direction privilégiée), montrez que l'aimantation totale M des n^* ions par unité de volume a pour expression :

$$M = M_\infty \left\{ \frac{m + \frac{1}{2}}{\text{th } \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) x\right]} - \frac{1}{2 \text{ th } \left(\frac{x}{2}\right)} \right\}$$

où l'on exprimera M_∞ en fonction de n^*, g et μ_B. Ce modèle a été proposé par le physicien français Léon Brillouin en 1927.

6. Dans le régime $x \ll 1$, on constate expérimentalement que l'aimantation suit la loi de Curie $M = \gamma \frac{B}{T}$ où γ est une constante spécifique du sel d'alun considéré. Exprimez, dans le cadre du modèle obtenu, γ en fonction de n^*, g, μ_B, du facteur $m(m+1)$ et de k_B.

7. Nous prenons ici $m = \frac{3}{2}$. On définit la fonction de Brillouin $f(x) = \frac{M(x)}{M_\infty}$. Pour quelles raisons physiques fondamentales observe-t-on, d'une part que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, et d'autre part que le graphe de $f(x)$ présente une asymptote horizontale ? Tracer l'allure de $f(x)$ pour $x \geq 0$. Expérimentalement, la susceptibilité magnétique $\chi = \frac{\mu_0 M}{B}$ de ce sel d'alun est voisine de $\chi = 1,0 \times 10^{-4}$ pour n^* proche du millier de moles par m^3, à la température de 300 K. Retrouvez-vous cet ordre de grandeur avec $g = 2$?

Le sel d'alun utilisé dans la désaimantation suit la loi de Curie $M = \gamma \frac{B}{T}$.

Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les moments magnétiques tendent à s'aligner selon le champ extérieur. Cet alignement est exothermique. Le sel d'alun est relié au premier étage de refroidissement qui évacue l'énergie thermique produite. Le sel est ensuite isolé thermiquement, et le champ magnétique est lentement diminué. Cette transformation est considérée comme adiabatique réversible.

8. L'énergie interne volumique u des n^* ions d'alun par unité de volume est une fonction d'état de ce système. Sa variation est donnée par $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s + B\,\mathrm{d}M$ où $s = s(T, B)$ est l'entropie volumique du système. Quelle serait l'équivalent du terme $B\,\mathrm{d}M$ pour un gaz soumis à des forces de pression ? Le sel est un solide, nous introduisons, à l'aide de l'approche des multiplicateurs de Lagrange, la fonction enthalpie volumique $h = u - BM$. Exprimez la différentielle de h. Dans le cadre du modèle utilisé, h ne dépend que de T, nous définissons c_B la capacité thermique du système par $\mathrm{d}h = c_B\,\mathrm{d}T$. Déterminez la variation $\mathrm{d}s$ de l'entropie en fonction de c_B, γ, B, T et des variations de température $\mathrm{d}T$ et de champ magnétique $\mathrm{d}B$.

9. Montrer que $\left(\frac{\partial c_B}{\partial B}\right)_T = -\eta \frac{\gamma B}{T^2}$ où l'on déterminera la constante η. Dans la gamme de température considérée, la capacité thermique d'un sel paramagnétique non soumis à un champ magnétique extérieur est celle d'un système chaud à deux états, i.e proportionnelle à l'inverse du carré de la température $c_B(T, B = 0) = \frac{\alpha}{T^2}$ où α est une constante caractéristique du sel considéré. En déduire l'expression de c_B en fonction de γ, α et des variables T et B.

10. Le réfrigérant est soumis à un champ magnétique de $B_i = 20\text{mT}$ et refroidi à une température $T_i = 350\text{mK}$ avant d'être isolé thermiquement. Le champ magnétique est lentement abaissé jusqu'à une valeur résiduelle de $B_f = 2,0\text{mT}$. Déterminez l'expression de la température finale T_f en fonction de γ, α, B_f, B_i et T_i. Dans les conditions de l'expérience, nous pouvons annuler le paramètre α, déduisez-en l'expression simplifiée de T_f en fonction de B_f, B_i et T_i puis sa valeur numérique.

Constantes et valeurs numériques

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \times 10^{-23}\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = k_B N_A = 8,3\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6,6 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\ \text{kg}$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On appelle sinus et cosinus hyperbolique de la variable réelle t, les fonctions :

$$\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

La fonction tangente hyperbolique de la variable réelle t est définie par le rapport $\text{th}(t) = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$. Au voisinage de $t = 0$, le développement de Taylor de la tangente hyperbolique s'écrit :

$$\text{th}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + o\left(t^3\right)$$

On rappelle également que $\frac{\text{d}}{\text{d}t}(\text{sh}(t)) = \text{ch}(t)$ et $\frac{\text{d}}{\text{d}t}(\text{ch}(t)) = \text{sh}(t)$.