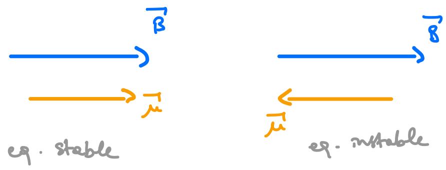
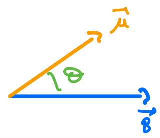
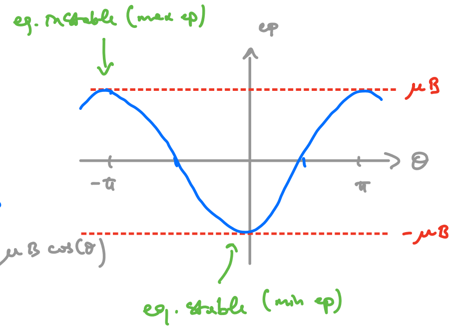
DS 7 - Problème 3

1.





$e_p = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu B \cos(\theta)$



2. $\vec{L} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v}$, et si la trajectoire est circulaire,
$\vec{v} \perp \vec{r}$ (en polaires, $\vec{r} = r\vec{e_r}$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$).

Donc $L = m_e r v$.

L'intensité est égale au débit de charge : $i = \frac{e}{T}$ (la charge e traverse une surface S tous les T)

Or, $2\pi r = vT$ donc $i = \frac{ev}{2\pi r}$.

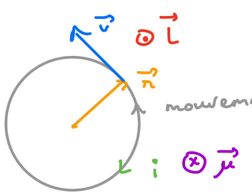
Comme, par définition, $\mu = iS$ avec $S = \pi r^2$, $\mu = \frac{ev}{2\pi r}\cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}$

On a vu précédemment que $rv = \frac{L}{m_e}$, donc $\mu = \frac{eL}{2m_e}$.

Enfin, $L = p\hbar$, donc $\mu = \frac{e\hbar}{2m_e}\cdot p$ soit $\mu = p\,\mu_B$ avec $\boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}}$

A.N : $\mu_B = 9{,}3 \cdot 10^{-24}\ A\cdot m^2$

Pour la direction et le sens :



$\vec{L}$ et $\vec{\mu}$ sont colinéaires, de sens opposé

3. $P_k = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_k}{k_B T}}$ avec $E_k = -k g \mu_B B$ donc $P_k = \frac{1}{Z} e^{\frac{k g \mu_B B}{k_B T}}$

Soit $P_k = \frac{1}{Z} e^{kx}$ avec $\boxed{x = \frac{g \mu_B B}{k_B T}}$

4. La normalisation impose $\sum_{k=-m}^{m} P_k = 1$ donc $\frac{1}{Z}\sum_{k=-m}^{m} e^{kx} = 1$ et donc $Z = \sum_{k=-m}^{m} e^{kx}$

On effectue un changement de variable : $k' = k + m$

D'où $Z = \sum_{k'=0}^{2m} e^{(k'-m)x} = e^{-mx} \sum_{k'=0}^{m} e^{k'x}$

Or, $\sum_{k'=0}^{2m} e^{k'x} = \frac{1-(e^x)^{2m+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(2m+1)x}}{1-e^x}$

Donc $Z = e^{-mx}\cdot \frac{1-e^{(2m+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{-(m+1/2)x}\left(1-e^{(2m+1)x}\right)}{e^{-x/2}\left(1-e^x\right)} = \frac{e^{-(m+1/2)x} - e^{(m+1/2)x}}{e^{-x/2} - e^{x/2}}$

D'où $Z = \dfrac{2\,\mathrm{sh}\left(x(m+1/2)\right)}{2\,\mathrm{sh}\left(x/2\right)}$ soit $\boxed{Z = \dfrac{\mathrm{sh}\left(x(m+1/2)\right)}{\mathrm{sh}\left(x/2\right)}}$

5. On peut calculer l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ par $\langle E \rangle = -\dfrac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$ $\left(\beta = \dfrac{1}{k_B T}\right)$

$x = \dfrac{g\mu_B B}{k_B T} = \beta g \mu_B B$

$\Rightarrow dx/d\beta = g\mu_B B$

D'où $\langle E \rangle = -\dfrac{d}{dx}\left(\ln\left(\mathrm{sh}\left(x(m+1/2)\right)\right) - \ln\left(\mathrm{sh}(x/2)\right)\right) \cdot \dfrac{dx}{d\beta}$

$$= -\left(\frac{1}{\mathrm{sh}\left(x(m+1/2)\right)} \cdot \mathrm{ch}\left(x(m+1/2)\right) \cdot (m+1/2) - \frac{1}{\mathrm{sh}(x/2)} \cdot \mathrm{ch}(x/2) \cdot 1/2\right) \cdot g\mu_B B$$

$$= -\left(\coth\left(x(m+1/2)\right)(m+1/2) - \frac{1}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot g\mu_B B$$

Or, $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B \Rightarrow \langle E \rangle = -\langle \mu_z \rangle \cdot B$

On en déduit $\langle \mu_z \rangle = -\dfrac{\langle E \rangle}{B} = g\mu_B\left((m+1/2)\coth\left(x(m+1/2)\right) - \dfrac{1}{2}\coth(x/2)\right)$

Enfin, $M_z = n^* \langle \mu_z \rangle$ donc $M_z = n^* g \mu_B \left((m+1/2)\coth\left(x(m+1/2)\right) - 1/2\coth(x/2)\right)$

Soit, en posant $\boxed{M_\infty = n^* g \mu_B \ :\ M_z = M_\infty\left((m+1/2)\coth\left(x(m+1/2)\right) - 1/2\coth(x/2)\right)}$

c'est bien le résultat de l'énoncé, $\coth = \dfrac{1}{\mathrm{th}}$

M_z et M sont la même chose

$(\vec{M} = M_z \vec{e_z}$ avec $M_z > 0 \Rightarrow M = \|\vec{M}\| = M_z)$

6. Pour $x \ll 1$ (approximation haute température), $\coth(x) \simeq \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3}$

Donc $\coth\left(x(m+1/2)\right) \simeq \dfrac{1}{x(m+1/2)} + \dfrac{x(m+1/2)}{3}$ et $\coth(x/2) \simeq \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{6}$

D'où $(m+1/2)\coth\left(x(m+1/2)\right) - 1/2\coth(x/2) = \dfrac{1}{x} + (m+1/2)^2\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{12}$

Donc $M \simeq \dfrac{M_\infty}{3}\left((m+1/2)^2 - \dfrac{1}{4}\right)x$

$$= \frac{n^* g \mu_B}{3}\left((m+1/2)^2 - 1/4\right) \frac{g\mu_B B}{k_B T}$$

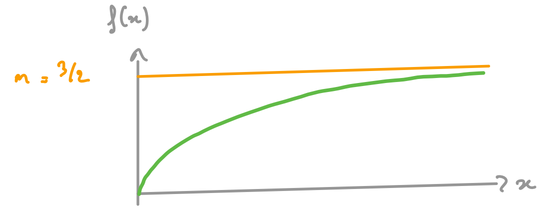
Si on pose $M = \gamma \dfrac{B}{T}$, on obtient : $\gamma = \dfrac{n^* g^2 \mu_B^2}{3 k_B}\left((m+1/2)^2 - 1/4\right)$

Enfin, $(m+1/2)^2 - 1/4 = m^2 + m + 1/4 - 1/4 = m(m+1)$

Finalement, $\boxed{\gamma = \dfrac{n^* g^2 \mu_B^2}{3 k_B} m(m+1)}$

7. $x \to 0$ revient à $T \to \infty$ $\left(x = \frac{g \mu_B B}{k_B T} \right)$ et + T est élevée, + l'agitation thermique tend à distribuer les orientations des moments magnétiques au hasard, ce qui revient à $\langle \vec{\mu} \rangle = \vec{0}$ et donc $M = 0$.

A l'inverse, en baisse T on tend vers une situation où tous les moments magnétiques sont alignés sur le champ, associée à la valeur max de M, égale à $n M_\infty$, d'où l'asymptote horizontale.



$\chi = \frac{\mu_0 M}{B}$. Si on se situe dans l'approximation $x \ll 1$, alors $M = \frac{\gamma B}{T}$

et donc $\chi = \frac{\mu_0}{\cancel{B}} \frac{\gamma \cancel{B}}{T} = \frac{\mu_0 \gamma}{T}$. Or, $\gamma = \frac{n^* \mu_B^2 g^2}{3 k_B} \cdot \frac{15}{4} = \frac{n^* \mu_B^2 g^2}{k_B} \cdot \frac{5}{4}$

$n(n+1) = 3/2 (3/2 + 1) = 3/2 \cdot 5/2 = 15/4$

d'où $\chi = \frac{\mu_0 n^* \mu_B^2 g^2}{k_B T} \cdot \frac{5}{4}$

A.N : $\chi \simeq 8 \cdot 10^{-5}$ ce qui est proche du 10^{-4} expérimental

8. l'équivalent de $B\,dM$ serait $-P\,dv$.

$h = u - BM$ donc $dh = du - B\,dM - M\,dB$

$= T\,ds + \cancel{B\,dM} - \cancel{B\,dM} - M\,dB$

donc $dh = T\,ds - M\,dB$

et $dh = c_B\,dT$ donc $c_B\,dT = T\,ds - M\,dB$ $\Rightarrow$ $ds = c_B \frac{dT}{T} + \frac{M}{T}\,dB$

Comme $M = \frac{\gamma B}{T}$, $\boxed{ds = c_B \frac{dT}{T} + \frac{\gamma}{T^2} B\,dB}$

9. Considérant s comme une fonction de T et B, $ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial s}{\partial B}\right)_T dB$

D'où, en identifiant : $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_B = \frac{c_B}{T}$ et $\left(\frac{\partial s}{\partial B}\right)_T = \frac{\gamma B}{T^2}$

Comme $\left(\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_B\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial s}{\partial B}\right)_T\right)_B$ (autrement dit on obtient le même résultat en dérivant d'abord par rapport à T ou d'abord par rapport à B)

On obtient : $\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{c_B}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\gamma B}{T^2}\right)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{T}\frac{\partial c_B}{\partial B} = -\frac{2}{T^3}\gamma B$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial c_B}{\partial B} = -\frac{2 \gamma B}{T^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\eta = 2}$

On intègre la relation précédente : $c_B = -\frac{\gamma B^2}{T^2} + c^{ste}$

et $c_B(T, B=0) = \frac{\alpha}{T^2}$ donc $\frac{\alpha}{T^2} = c^{ste}$ $\Rightarrow$ $\boxed{c_B = \frac{\alpha - \gamma B^2}{T^2}}$

10. L'évolution est considérée comme adiabatique et réversible, donc isentropique.

Donc $dS = 0$, donc $c_B \frac{dT}{T} + \frac{\gamma}{T^2} B\,dB = 0$

$\Rightarrow c_B \frac{dT}{T} = -\frac{\gamma}{T^2} B\,dB$ Or, $c_B = -\frac{\gamma B^2}{T^2}$ (on prend $\alpha = 0$)

donc $-\gamma \frac{B^2}{T^2} \frac{dT}{T} = -\frac{\gamma}{T^2} B\,dB \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dB}{B} \Rightarrow \int_{T_i}^{T_f} dT/T = \int_{B_i}^{B_f} dB/B$

$\Rightarrow \ln(T_f/T_i) = \ln(B_f/B_i) \Rightarrow \boxed{T_f = T_i \cdot B_f/B_i}$ A.N : $T_f = 35\ mK$