

Devoir de révision

A rendre le mardi 1^{er} septembre

Consignes générales

- Les réponses non justifiées, les applications numériques ne comportant pas d'unité, les résultats finaux non encadrés ou soulignés à la règle ne seront tout simplement pas lus.
- Travailler en groupe est encouragé mais le travail de rédaction doit être individuel.
- On portera une attention toute particulière à la vraisemblance des résultats obtenus : homogénéité des formules littérales, étude de cas particuliers, ordres de grandeur des valeurs numériques.

1 Un circuit RLC

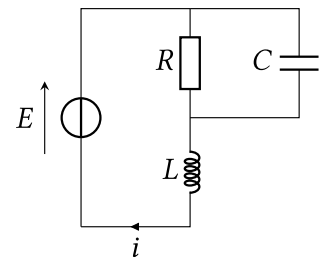
Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.

1. Montrer que le courant i vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$$

avec ω_0 , Q et i_∞ des constantes à exprimer en fonction de E , R , L et C .

2. Déterminer et justifier soigneusement la valeur de i et de sa dérivée temporelle à $t = 0^+$.
3. En supposant que $Q = 2$, résoudre l'équation et tracer l'allure de $i(t)$.



2 Résonance d'un pont de Wien

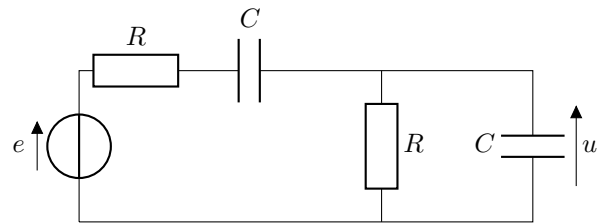
Considérons le circuit ci-contre, nommé pont de Wien, en régime sinusoïdal établi.

On associe aux tensions $e(t) = E \cos(\omega t)$ et $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ les amplitudes complexes $\underline{E} = E$ et $\underline{U} = U e^{j\varphi}$.

1. On pose $x = RC\omega$. Montrer que :

$$\underline{U} = \frac{E}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

2. Montrer qu'il y a résonance de l'amplitude U . Exprimer la pulsation ω_0 de résonance.
3. Déterminer la largeur de résonance $\Delta\omega$. En déduire la valeur du facteur de qualité Q du circuit.
4. Représenter l'allure des courbes d'amplitude U et de phase φ en fonction de ω .



3 Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie

Un pH-mètre est composé d'une électrode de verre qui délivre un signal électrique fonction affine du pH , de la forme :

$$U_0 = A + B \times pH$$

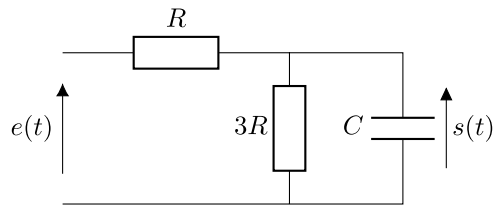
où A et B sont des constantes ajustées par étalonnage du pH-mètre.

Du fait de la proximité de dispositifs d'agitation, un signal sinusoïdal de fréquence égale à 4 kHz se superpose au signal utile. Ainsi le signal s'écrit

$$e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi)$$

1. Le signal parasite n'étant pas utile, on souhaite l'éliminer tout en conservant la partie utile du signal, à savoir U_0 . Quel type de filtre faut-il utiliser ? Estimer alors la fréquence de coupure nécessaire à ce filtrage.

On propose de réaliser le quadripôle ci-dessous avec $C = 1,0 \cdot 10^{-7}$ F et $R = 5,3 \cdot 10^3 \Omega$, alimenté par un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω .



2. Déterminer la nature du filtre sans calcul complexe.
3. Montrer que la fonction de transfert complexe de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite. Déterminer les expressions et les significations des constantes H_0 et ω_0 . En déduire l'ordre du filtre.

4. Exprimer le gain linéaire $G(x)$ et le déphasage $\varphi(x)$ introduits par le filtre à la pulsation réduite x .
5. Après avoir défini la pulsation de coupure ω_c , établir son expression en fonction de R et C . Calculer la fréquence de coupure f_c et vérifier que cette valeur est cohérente avec celle attendue en Q1.
6. En utilisant la pulsation réduite, déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain et en phase. Représenter le diagramme asymptotique sur votre copie. Préciser si le filtre a un caractère pseudo-dérivateur ou pseudo-intégrateur dans certains domaines de fréquences. Justifier.
7. À partir des valeurs du gain en décibels et du déphasage à la pulsation de coupure, représenter les diagrammes de Bode réels.

Le filtre précédent est maintenant alimenté par le signal issu du pH-mètre : $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ tel que $f = 4$ kHz. On cherche à déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$.

On donne l'écriture générale de $s(t)$ en introduisant une amplitude S_m , une phase à l'origine des temps φ_s et une composante continue S_0 , sous la forme :

$$s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi_s).$$

8. En utilisant la fonction de transfert, déterminer :

- L'expression de S_0 en fonction de U_0 ;
- L'expression de S_m en fonction de E_m ;
- L'expression de φ_s en fonction de φ_e .

En déduire l'expression du signal de sortie $s(t)$.

Enfin, représenter sur le même graphique les signaux $e(t)$ et $s(t)$. A-t-on réalisé ce que l'on souhaitait ?