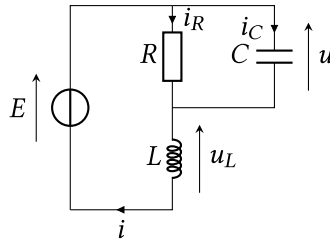


Correction devoir de révision

1 Un circuit RLC



1. Commençons par la loi des nœuds,

$$i = i_R + i_C$$

Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u , commune à R et C qui sont montés en parallèle,

$$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$$

La loi des mailles permet ensuite d'exprimer la tension u en termes de la tension u_L : $u = E - u_L$. Ainsi, comme la tension E est constante,

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C \frac{du_L}{dt}.$$

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Récrivons l'équation en mettant à 1 le préfacteur devant la dérivée d'ordre le plus élevé,

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{RLC}} \quad \text{à identifier à} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$$

Ainsi, on est amené à poser

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} & \text{d'où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} & \text{d'où } Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ \omega_0^2 i_\infty = \frac{E}{RLC} & \text{d'où } i_\infty = \frac{E}{R} \end{array} \right.$$

2. Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0.$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

puisque $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Analysons maintenant le circuit à $t = 0^+$. Par continuité du courant traversant une bobine, on déduit directement

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0.}$$

Pour trouver la valeur de di/dt , il faut trouver la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$,

$$E = u(0^+) + u_L(0^+).$$

Or en tant que tension aux bornes d'un condensateur $u(0^+)$ est continue et égale à $u(0^+) = u(0^-) = 0$, d'où

$$u_L(0^+) = E \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}.}$$

3. **Forme générale des solutions** : Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \omega_0^2 i_p = \omega_0^2 i_\infty \quad \text{d'où} \quad i_p = i_\infty$$

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4} \omega_0^2 < 0 \quad \text{car } Q = 2.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm i \frac{\omega_0}{4} \sqrt{15} \quad \text{qu'on note} \quad r_{1,2} = -\mu \pm i\omega_p$$

où $\mu > 0$ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-\mu t},$$

avec A et B deux constantes. En regroupant,

$$i(t) = i_p + i_h(t) = i_\infty + [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-\mu t}.$$

Détermination des constantes : On a d'abord

$$i(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{i_\infty} + A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cl}}}{0} \quad \text{d'où} \quad A = -i_\infty$$

Calculons maintenant la dérivée,

$$\frac{di}{dt} = \omega_p [-A \sin(\omega_p t) + B \cos(\omega_p t)] e^{-\mu t} - \mu [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-\mu t}$$

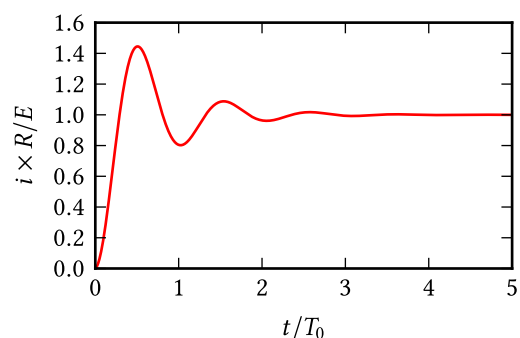
ce qui donne

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{B\omega_p} - \mu A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cl}}}{\frac{E}{L}} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{E}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right)$$

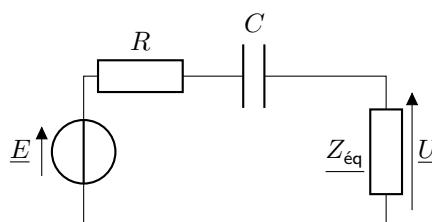
Conclusion :

$$i(t) = i_\infty - i_\infty \left[\cos(\omega_p t) + \frac{R}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right) \sin(\omega_p t) \right] e^{-\mu t}.$$

Tracé : Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donnent la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté ci-contre.



2 Résonance d'un pont de Wien



1. La résistance et le condensateur montés en parallèle ont pour impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = jC\omega + \frac{1}{R}$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{U} = \frac{\frac{\underline{Z}_{\text{eq}} E}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R + \frac{1}{jC\omega}}}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}} = \frac{\underline{E}}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(jC\omega + \frac{1}{R}\right)} = \frac{\underline{E}}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par 3, on obtient la forme recherchée :

$$\underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right)} \frac{\underline{E}}{3}$$

$$2. U = |\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \frac{E}{3}$$

L'amplitude U est maximale si $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ est minimal donc :

$$x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ car } x \geq 0$$

Il y a donc toujours résonance, pour une pulsation telle que $RC\omega_0 = 1$, soit $\omega_0 = 1/RC$.

3. Cherchons les pulsations de coupure ω , telles que $U(\omega) = U_{\text{max}}/\sqrt{2}$. soit :

$$\frac{1}{9} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 3 \Leftrightarrow x^2 \pm 3x - 1 = 0.$$

Ces équations ayant pour discriminant $9 + 4 = 13 > 0$, elles admettent chacune deux solutions réelles

$$x = \frac{\pm 3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

mais les seules solutions physiquement pertinentes sont

$$x_{\pm} = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}.$$

On en déduit la largeur de la résonance,

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = (x_+ - x_-) \omega_0$$

d'où on déduit

$$\Delta\omega = 3\omega_0 \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{3}$$

$$4. \text{ Allure de l'amplitude réelle } U = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \frac{E}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} U = 0 \quad U(1) = U_{\text{max}} = \frac{E}{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U = 0$$

Calcul et allure de la phase φ

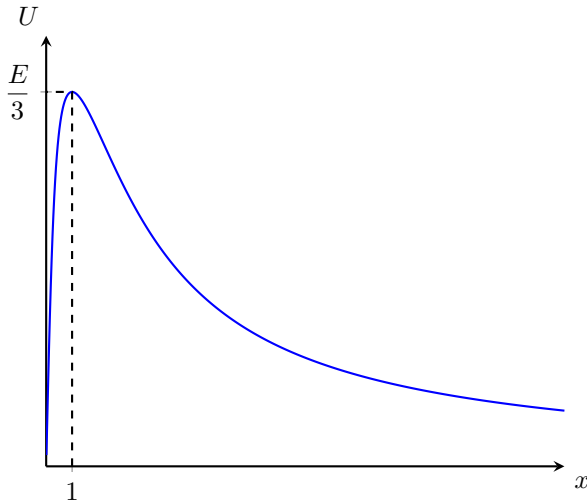
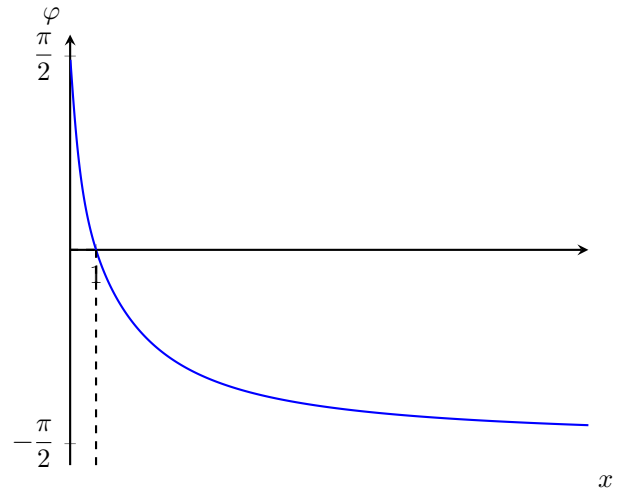
$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg E/3 - \arg \left[1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = 0 - \theta = -\theta$$

avec $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{3}(x - \frac{1}{x})}{1} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}(x - \frac{1}{x})^2}}$$

Or $\cos \theta > 0$ donc $\theta \in [0, \pi/2]$ et donc $\arctan(\tan \theta) = \theta$. Au final :

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{3}\right)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi = \pi/2 \quad \varphi(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = -\pi/2$$

Allure de U Allure de φ

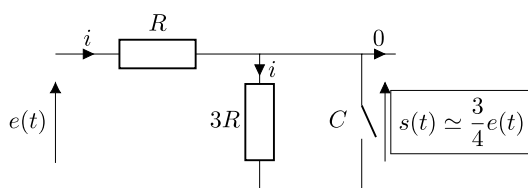
3 Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie

- Il faut utiliser un **filtre passe-bas de fréquence de coupure f_C faible devant 4 kHz** afin de conserver la composante continue et supprimer le signal sinusoïdal de fréquence 4 kHz.

On choisira, par exemple,

$$\boxed{f_C \approx \frac{4000}{10} \approx 400 \text{ Hz}}$$

Schéma électrique équivalent en BF :



2.

En BF : Les résistances R et $3R$ sont en série.

Pont diviseur de tension :

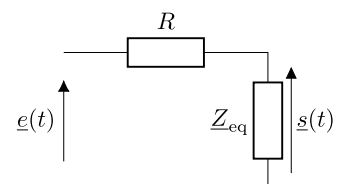
$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{3R}{3R + R} = \frac{3}{4} = \text{cste}; \quad G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB} = \text{cste}.$$

En HF : $\underline{H} = \frac{s}{e} \approx 0$ et $G_{dB} \rightarrow -\infty$.

Conclusion : C'est un filtre passe-bas.

On calcule $\underline{Z}_{eq}$ équivalent à $3R$ et C en parallèle à la sortie :

$$3. \quad \underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{3R \times \frac{1}{jC\omega}}{3R + \frac{1}{jC\omega}}; \quad \boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{3R}{1 + j3RC\omega}}$$



Ainsi, $\underline{Z}_{eq}$ est en série avec R : pont diviseur de tension,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} = \frac{\frac{3R}{1 + j3RC\omega}}{R + \frac{3R}{1 + j3RC\omega}} = \frac{3R}{R + j3R^2C\omega + 3R} = \frac{3}{4 + j3RC\omega}$$

Soit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{3}{4 + j3RC\omega} = \frac{3}{4 \left(1 + j\frac{3RC\omega}{4}\right)} = \frac{3/4}{1 + j\frac{3RC\omega}{4}}$$

De la forme $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ si

$$H_0 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{4}{3RC}$$

H_0 est la fonction de transfert statique et ω_0 la pulsation propre.

C'est un **filtre passe-bas du 1^{er} ordre**.

4. Par définition,

$$G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Et $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(\text{num}) - \arg(\text{den}) = 0 - \arctan(x)$; Ainsi :

$$\varphi(x) = -\arctan(x)$$

5. La pulsation de coupure ω_C est définie par

$$G(\omega_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

Or $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}}$; ainsi G est max pour $x = 0$ et $G_{max} = H_0 = \frac{3}{4}$.

Ainsi, $G(x_C) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x_C^2}}$; il vient donc $x_C = 1 = \frac{\omega_C}{\omega_0}$; soit :

$$\omega_C = \omega_0 = \frac{4}{3RC} \quad \text{et} \quad f_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = \frac{2}{3\pi RC}$$

AN : $f_C = \frac{2}{3\pi \times 5,3 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^{-7}}$. On obtient :

$$f_C \approx 400 \text{ Hz}$$

On a bien f_C dix fois plus faible que la fréquence du signal parasite que l'on veut éliminer, ce qui paraît tout à fait satisfaisant.

6. Étude asymptotique de $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$.

En BF : Si $\omega \ll \omega_0$ ou si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim H_0 = \frac{3}{4}$

- Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) = 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB}$; **asymptote horizontale en BF**.
- Et $\varphi \rightarrow 0$.

En HF : Si $\omega \gg \omega_0$ ou $x \gg 1$: $\underline{H} \sim \frac{H_0}{jx} \sim -j \frac{H_0}{x}$

- Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$: **asymptote oblique de pente -20 dB par décade en HF**.

▪ Et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Intersection des asymptotes en A telle que :

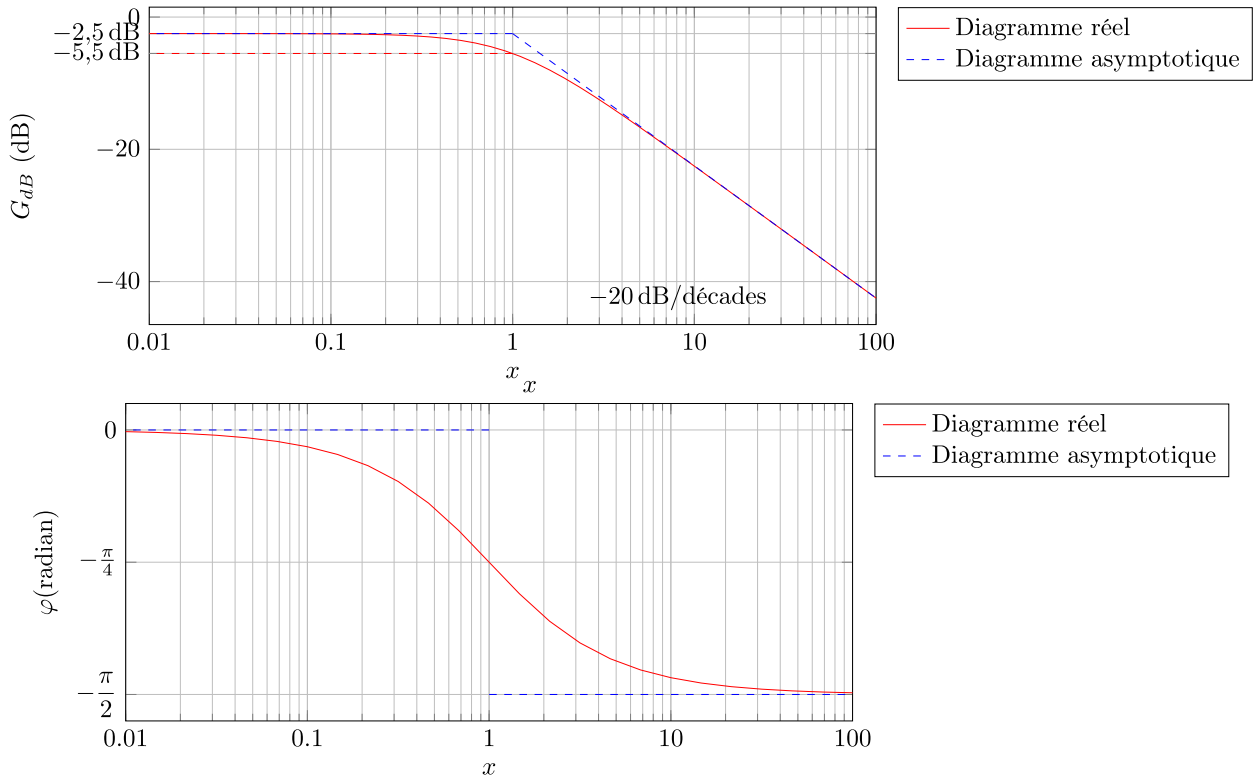
$$20 \log(H_0) - 20 \log(x_A) = 20 \log(H_0) ; \quad \text{soit} \quad \log(x_A) = 0$$

et pour $G_{dB}(A) = 20 \log(H_0) \approx -2,5 \text{ dB}$.

Ainsi les coordonnées du point d'intersection des asymptotes :

$$A(0; -2,5)$$

D'où le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase).



Ce filtre présente un **caractère pseudo-intégrateur en haute fréquence**, car il présente une asymptote oblique de pente -20 dB/décade .

7. *Diagramme réel* : en $x = 1$ ou $\log(x) = 0$:

$$\underline{H}(jx = 1) = \frac{H_0}{1 + j} \quad \text{et} \quad G(1) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$G_{dB}(1) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{2}) = -2,5 - 3$$

Ainsi :

$$G_{dB}(\log(x) = 0) = -5,5 \quad \text{et} \quad \varphi(\log(x) = 0) = -\frac{\pi}{4}$$

D'où le diagramme de Bode réel ajouté sur le diagramme asymptotique.

8. **Composante continue** : on se place en basses fréquences : $\underline{H} \sim H_0 = \frac{S_0}{U_0} = \frac{3}{4}$; ainsi :

$$S_0 = \frac{3}{4} U_0$$

À la fréquence de 4 kHz : $f = 10f_C$, soit $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_C} = 10$ et $\log(x) = 1$.

À cette fréquence, $G_{dB}(1) = -22,5 \text{ dB} = 20 \log(G)$; d'où $\log(G) = -\frac{22,5}{20}$ et $G = \frac{S_m}{E_m} = 10^{-1,03}$

D'où

$$S_m \approx 0,09 E_m \approx \frac{E_m}{10}$$

L'amplitude du signal parasite est atténuée d'un facteur 10.

Et $\varphi_s = \Phi(x) + \varphi_e$ où $\Phi(x)$ est le déphasage lié au filtre. Or en $\log(x) = 1$, $\Phi \approx -1,5 \text{ rad}$

Alors $\varphi_s \approx \varphi_e - 1,5 \text{ rad}$.

Conclusion :

$$s(t) = \frac{3}{4}U_0 + \frac{E_m}{10} \cos(\omega t + \varphi_e - 1,5)$$

D'où l'allure du signal $s(t)$ superposée à $e(t)$: $s(t)$ oscille faiblement autour de la valeur moyenne $\frac{3}{4}U_0$, tandis que $e(t)$ présente de fortes oscillations sinusoidales autour de U_0 .

