

TD physique 5

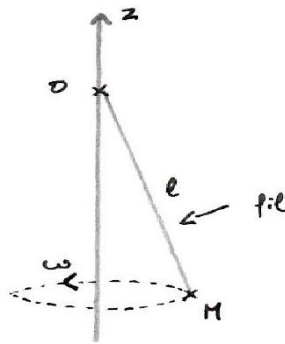
Révisions mécanique (1)

Exercice 1

Une bille de masse m est suspendue à un fil de longueur l , inextensible et de masse négligeable. L'extrémité supérieure du fil est fixée en un point O , fixe dans un repère (R) galiléen.

Une bille de masse m , assimilable à un point matériel, est suspendue au fil et tourne dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire ω_0 constante.

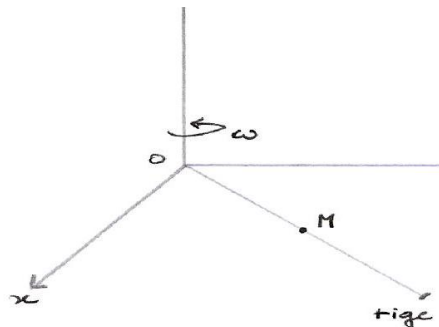
Déterminer, en fonction de g, l et ω_0 , l'angle que fait le fil avec la verticale.



Exercice 2

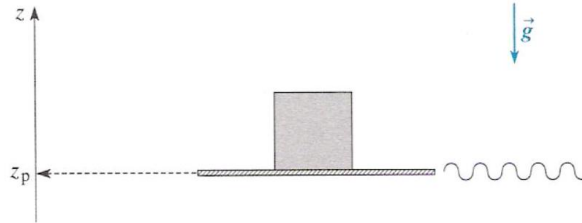
Une bille assimilée à un point matériel M de masse m , percée d'un trou, est astreinte à se déplacer le long d'une tige rectiligne de longueur L . Ce contact se fait sans frottements. La tige, dont une extrémité est fixée au point O du repère $(Oxyz)$, référentiel terrestre local considéré ici comme Galiléen, tourne dans ce repère à vitesse angulaire ω constante dans le plan (xOy) . La bille se trouve initialement à une distance d de O , sans mouvement par rapport à la tige.

- 1) Déterminer l'évolution de la distance OM au cours du temps
- 2) Calculer la réaction exercée par la tige sur la bille



Exercice 3

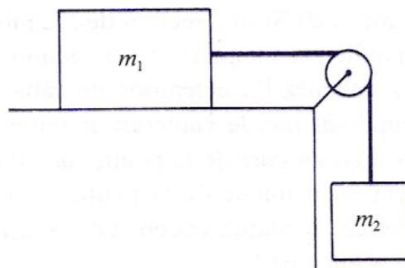
Un plateau horizontal est animé d'un mouvement vertical caractérisé par $z(t) = a \cos(\omega t)$. Un objet, que l'on assimile à un point matériel de masse m est posé sur ce plateau. Déterminer la condition sur la fréquence du mouvement du plateau pour que l'objet ne quitte jamais le plateau (pour qu'ils soient toujours en contact).



Exercice 4

On considère le dispositif représenté ci contre, on néglige tous les frottements ainsi que l'inertie de la poulie. $m_1 = 12 \text{ kg}$ et $m_2 = 4 \text{ kg}$.

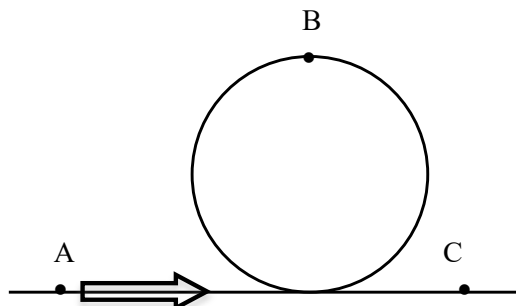
1. Calculer l'accélération de la masse m_1
2. Si m est initialement immobile et à 250 cm du bord de la table, en combien de temps y arrivera-t-elle ?



Exercice 5

Un objet (par exemple une petite voiture sur un circuit) passe au point A, effectue un looping en passant par le point B (sommet du mouvement) et enfin passe par le point C. Tout le mouvement s'effectue sans frottements, et on considère que à partir du point A l'objet continue sur son élan, il n'y a pas de force tangentielle qui tend à le faire avancer. On note m la masse de l'objet, R le rayon du cercle correspondant à la trajectoire, g l'accélération de la pesanteur et v_0 la vitesse au point A. Quelle est la valeur minimale de v_0 qui permet à l'objet de ne pas quitter la piste au cours du looping ? Quelle est alors la vitesse au point B ? Quelle est la vitesse au point C ?

Application numérique : $m = 100g$; $R = 20cm$ et $g = 10m.s^{-2}$



Exercice 6

On abandonne sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse alors sans frottements sur une distance L avant de rencontrer un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. Déterminer la longueur maximale dont sera comprimé le ressort

Exercice 7

1. Etablir l'équation différentielle pour une masse ponctuelle m accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k (l'autre extrémité restant immobile), le mouvement étant horizontal et sans frottements.
2. Le ressort est, pour cette question, vertical. Si l'on suspend une masse de $100g$ à l'extrémité du ressort, il s'allonge de $1cm$. Calculer sa constante de raideur.
3. Ce ressort est utilisé pour propulser un projectile de masse $10g$. Sa longueur à vide est de $5cm$ et il est initialement comprimé à une longueur de $3cm$. Quelle est la vitesse du projectile lorsqu'il quitte le contact avec le ressort ? (on néglige toute inertie du ressort lui même).
4. Combien de temps dure la détente du ressort ?

Exercice 8

On considère un oscillateur « harmonique » masse + ressort horizontal, amorti par une force de frottement solide. On note m la masse, k la constante de raideur, g l'accélération de la pesanteur et μ le coefficient de frottement solide. On repère par la coordonnée x la position de la masse, et on prend l'origine au niveau de la position d'équilibre.

1. Donner, en fonction de g , m et μ , l'expression de l'intensité de la force de frottement solide (lorsqu'il y a glissement).
2. Donner l'équation différentielle du mouvement de la masse. Distinguer deux cas, selon que la masse se déplace vers la gauche ou vers la droite.
3. Montrer qu'il existe une zone $[-a, +a]$ où, si l'oscillateur atteint une vitesse nulle, il ne repart pas. Exprimer a en fonction de m , g , k et μ .
4. Initialement, $x = X_0$ (supérieur à a) et $v_x = 0$. Déterminer $x(T/2)$, où $T = \frac{2\pi}{\omega_0} 2$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
5. Déterminer $x(T)$ et $x(3T/2)$, en supposant qu'ils sont (en valeur absolue), supérieurs à a .
6. Expliquer qualitativement quelle sera l'évolution ultérieure de l'oscillateur.
7. Si $X_0 = 8,5a$, combien l'oscillateur effectue-t-il d'aller - retours avant de s'immobiliser ?

Exercice 9

On s'intéresse aux oscillations d'une molécule HCl , dans l'approximation d'oscillations harmoniques. L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est donnée par :

$E_p(r) = C.r^{-n} - \alpha e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$, où C , n , et α sont des constantes positives. Les valeurs, déterminées expérimentalement, sont : $C = 1,06.10^{-138}SI$; $\alpha = 0,4$ et $n = 12$.

1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable et calculer la valeur de r correspondante.
2. Montrer que, dans l'approximation d'oscillations harmoniques, les forces associées à l'énergie potentielle donnée ci-dessus sont équivalentes à une force de rappel élastique et calculer la " constante de raideur ».
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par r lors des oscillations harmoniques (on considérera que l'atome de Chlore est immobile).
4. En déduire la période propre de ces oscillations.

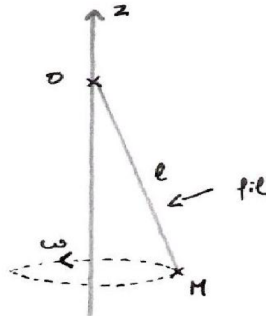


Exercice 1

Une bille de masse m est suspendue à un fil de longueur l , inextensible et de masse négligeable. L'extrémité supérieure du fil est fixée en un point O , fixe dans un repère (R) galiléen.

Une bille de masse m , assimilable à un point matériel, est suspendue au fil et tourne dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire ω_0 constante.

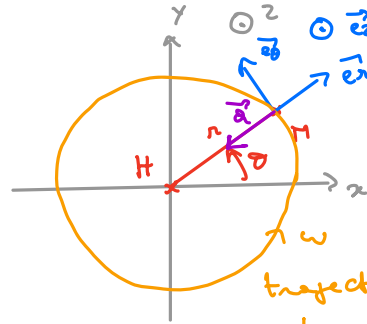
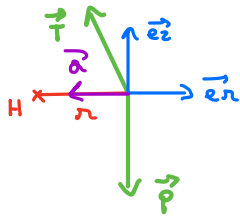
Déterminer, en fonction de g , l et ω_0 , l'angle que fait le fil avec la verticale.



Il est utile dans cet exercice de représenter la situation selon deux points de vue différents :

l'angle α est constant

$$r(\alpha) = l \sin \alpha$$



le mouvement est circulaire uniforme, dans le plan $\perp$ à (Oz) et passant par H

trajectoire circulaire de rayon r

mth circulaire uniforme : $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$

2^o loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow$ projection / $\vec{e}_r$: $-mr\omega^2 = -T \sin(\alpha)$
 projection / $\vec{e}_z$: $0 = -mg + T \cos(\alpha)$

On obtient donc $\frac{r\omega^2}{g} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{Or, } r = l \sin(\alpha)$

donc $\frac{l \sin(\alpha) \omega^2}{g} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{g}{l\omega^2}$

Variante : dans le référentiel non galiléen qui tourne autour de (Oz) à la vitesse angulaire ω (dans lequel m est immobile), on a :

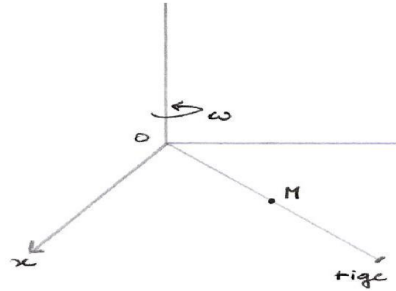
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{f}_{ic} = m\omega^2 r \vec{e}_r$$

et on conclut de la même manière ...

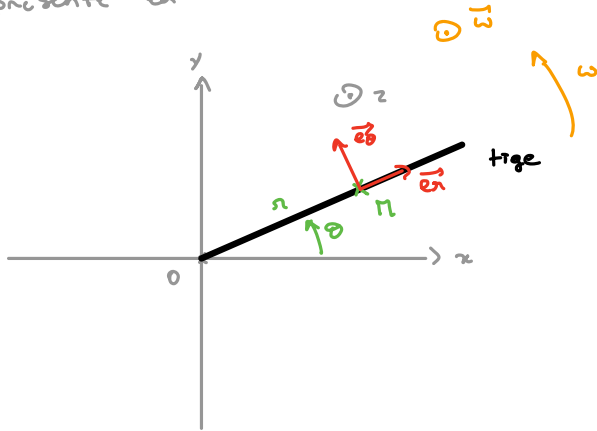
Exercice 2

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m, percée d'un trou, est astreinte à se déplacer le long d'une tige rectiligne de longueur L. Ce contact se fait sans frottements. La tige, dont une extrémité est fixée au point O du repère (Oxyz), référentiel terrestre local considéré ici comme Galiléen, tourne dans ce repère à vitesse angulaire ω constante dans le plan (xOy). La bille se trouve initialement à une distance d de O, sans mouvement par rapport à la tige.

- 1) Déterminer l'évolution de la distance OM au cours du temps
- 2) Calculer la réaction exercée par la tige sur la bille



On représente la situation vue de dessus :



bilan des forces : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

$$\vec{R}_M = R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z$$

tout ce que l'on sait sur la réaction est qu'elle n'a pas de composante sur $\vec{e}_r$ (pas de frottements) donc orthogonale à la tige
 $\Rightarrow$ composantes sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ —

1. On utilise la 2^e loi de Newton dans le référentiel $(\mathcal{R}) = (Ox, y, z)$, galiléen -

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_M, \text{ avec } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \ddot{\theta} \text{ est nul puisque la bille est astreinte à rester sur la tige, qui tourne à vitesse angulaire constante, donc } \dot{\theta} = \omega = c^{ste}$$

$$\text{projection / } \vec{e}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{projection / } \vec{e}_\theta : m \cdot 2\dot{r}\dot{\theta} = R_\theta \quad (2)$$

$$\text{projection / } \vec{e}_z : 0 = -mg + R_z \quad (3)$$

On exploite (1) pour déterminer l'évolution de $r = OM$:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad \text{donc} \quad r = \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t} \quad \triangle$$

$$\text{et les C.I donnent } \begin{cases} r(t=0) = d \\ \dot{r}(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda + \mu = d \\ \omega(\lambda - \mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = d/2 \quad \text{et donc } r = \frac{d}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$\text{soit } \underline{r = d \cosh(\omega t)}$$

ce n'est pas une solution en cosinus, ce serait le cas pour $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$

2. On calcule la réaction en utilisant les projections (2) et (3):

(2) donne $R_0 = 2 m \dot{\theta}$, mais $\dot{\theta} = \omega$ et $\dot{r} = \omega d \operatorname{sh}(\omega t)$

d'où $R_0 = 2 m \omega^2 d \operatorname{sh}(\omega t)$

(3) donne $R_z = mg$

Variante: Dans le référentiel (R') non galiléen qui tourne avec la tige (dans lequel la tige est immobile), le mouvement de M se fait seulement le long de la tige: $\vec{v}(M/R') = \dot{r} \vec{e}_r$ et $\vec{a}(M/R') = \ddot{r} \vec{e}_r$

On doit ajouter les forces d'inertie d'entraînement (centrifuge) et de Coriolis: $\vec{f}_{ic} = m \omega^2 r \vec{e}_r$ et $\vec{f}_{ec} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/R')$
 $= -2m (\omega \vec{e}_z) \wedge (\dot{r} \vec{e}_r)$
 $= -2m \omega \dot{r} \vec{e}_\theta$

Le 2^e loi de Newton dans (R') donne:

$$m \vec{a}(M/R') = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ic} + \vec{f}_{ec}$$

d'où les projections:

sur $\vec{e}_r$: $m \ddot{r} = 0 + 0 + m \omega^2 r + 0$

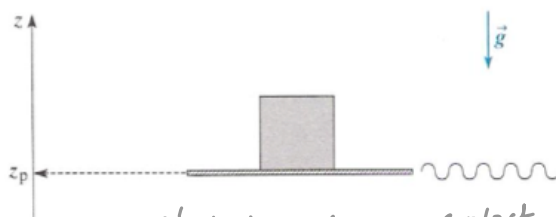
sur $\vec{e}_\theta$: $0 = 0 + R_0 + 0 - 2m \omega \dot{r}$

sur $\vec{e}_z$: $0 = -mg + R_z$

On retrouve bien les résultats obtenus dans (R)

Exercice 3

Un plateau horizontal est animé d'un mouvement vertical caractérisé par $z(t) = a \cos(\omega t)$. Un objet, que l'on assimile à un point matériel de masse m est posé sur ce plateau. Déterminer la condition sur la fréquence du mouvement du plateau pour que l'objet ne quitte jamais le plateau (pour qu'ils soient toujours en contact).

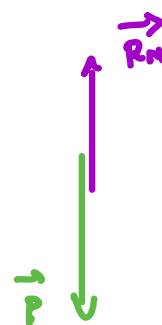


On raisonne en considérant que l'objet reste en contact avec le plateau et on cherche à caractériser le cas limite où il décolle.

Alors l'accélération de l'objet est la même que celle du plateau, donc

$$\vec{a} = \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z = -a \omega^2 \cos^2(\omega t) \vec{e}_z$$

↳ attention, ce a est une distance, pas l'accélération !



la 2^e loi de Newton donne $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$

donc projeté sur $\vec{e}_z$: $-m a \omega^2 \cos^2(\omega t) = -mg + R_N$

$$\text{Soit } R_N = m(g - a \omega^2 \cos^2(\omega t))$$

Tant que l'objet reste en contact, $R_N \geq 0$, donc $a \omega^2 \cos^2(\omega t) \leq g$

On veut une condition sur ω pour que l'objet ne quitte jamais le contact,

donc $a \omega^2 \cos^2(\omega t) \leq g$ quel que soit t , ce qui implique $a \omega^2 \leq g$

(l'endroit "critique" est le sommet du mouvement).

La réponse est donc $\omega \leq \omega_{\text{lim}}$ avec $\omega_{\text{lim}} = \sqrt{g/a}$

Variante : Dans le référentiel non galiléen qui se déplace avec le plateau,

l'objet est immobile tant qu'il reste en contact.

$$\begin{aligned} \text{la force d'inertie est } \vec{f}_{ic} &= -m \vec{a}(\text{plateau}/\text{Réf. terrestre}) \\ &= -m(-a \omega^2 \cos^2(\omega t)) \vec{e}_z \\ &= m a \omega^2 \cos^2(\omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

L'objet décolle lorsque $\vec{f}_{ic}$ est vers le haut et est supérieure au poids,

donc ne décolle pas tant que $f_{ic} \leq P$, soit $m a \omega^2 \cos^2(\omega t) \leq mg$

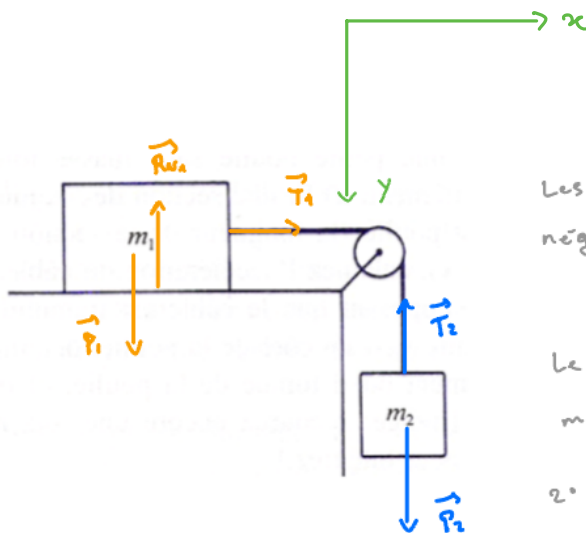
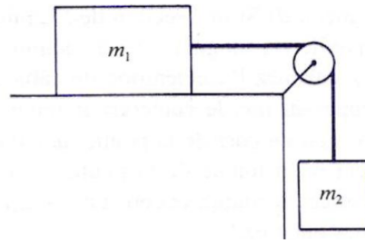
et on conclut comme précédemment ...

Exercice 4

On considère le dispositif représenté ci contre, on néglige tous les frottements ainsi que l'inertie de la poulie.

$m_1 = 12 \text{ kg}$ et $m_2 = 4 \text{ kg}$.

1. Calculer l'accélération de la masse m_1
2. Si m est initialement immobile et à 250 cm du bord de la table, en combien de temps y arrivera-t-elle?



Les frottements et l'inertie de la poulie étant négligés, $T_1 = T_2$ (mais $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$: la direction n'est pas la même !)

Le fil étant inextensible, $a_1 = a_2 (= a)$, mais là encore $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$.

2° loi de Newton pour m_1 :

$$m_1 \vec{a}_1 = \underbrace{\vec{P}_1 + \vec{R}_1}_{=\vec{0}} + \vec{T}_1$$

donc, en projetant sur (Ox) : $m_1 a = T_1$ (1)

2° loi de Newton pour m_2 :

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$$

en projetant sur (Oy) : $m_2 a = P_2 - T_2$

$$\text{soit } m_2 a = m_2 g - T_2 \quad (2)$$

On somme (1) et (2): $m_1 a + m_2 a = \cancel{T_1} + m_2 g - \cancel{T_2}$

d'où

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

interprétation intuitive:

le poids de m_2 ($= m_2 g$)

entraîne l'ensemble $m_1 + m_2$

$$2. \quad a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

$$\text{donc } v_1 = a t$$

$$\text{et } x_1 = -d + \frac{a t^2}{2}$$

(avec $d = 250 \text{ cm}$)

m_1 arrive donc au bord de la table ($x_1 = 0$) pour

$$-d + \frac{a t^2}{2} = 0$$

$$\text{soit } t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

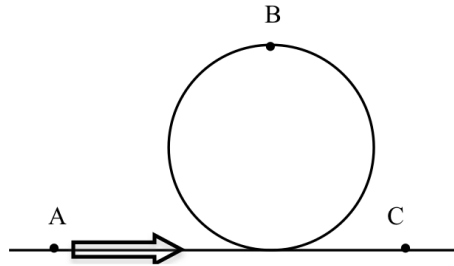
$$\underline{\text{A.N. : } a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

$$\underline{t = 1,41 \text{ s}}$$

Exercice 5

Un objet (par exemple une petite voiture sur un circuit) passe au point A, effectue un looping en passant par le point B (sommet du mouvement) et enfin passe par le point C. Tout le mouvement s'effectue sans frottements, et on considère que à partir du point A l'objet continue sur son élan, il n'y a pas de force tangentielle qui tend à le faire avancer. On note m la masse de l'objet, R le rayon du cercle correspondant à la trajectoire, g l'accélération de la pesanteur et v_0 la vitesse au point A. Quelle est la valeur minimale de v_0 qui permet à l'objet de ne pas quitter la piste au cours du looping? Quelle est alors la vitesse au point B? Quelle est la vitesse au point C?

Application numérique : $m = 100g$; $R = 20cm$ et $g = 10m.s^{-2}$



On part des idées suivantes :

- l'endroit le plus critique est le sommet du mouvement (point B) : si la voiture reste au contact au point B, elle le sera partout.
- la rupture de contact est traduite par le fait que la réaction normale R_N s'annule.

On écrit la 2^e loi de Newton :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

$$\text{avec } \vec{a} = -R\ddot{\theta} \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Or, } \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$$

Donc au point B et projeté sur $\vec{e}_r$:

$$-m \frac{v_B^2}{R} = -mg - R_N$$

Limite du décollement pour $R_N = 0$, donc pour $\frac{v_B^2}{R} = g \Rightarrow \underline{v_B = \sqrt{gR}}$

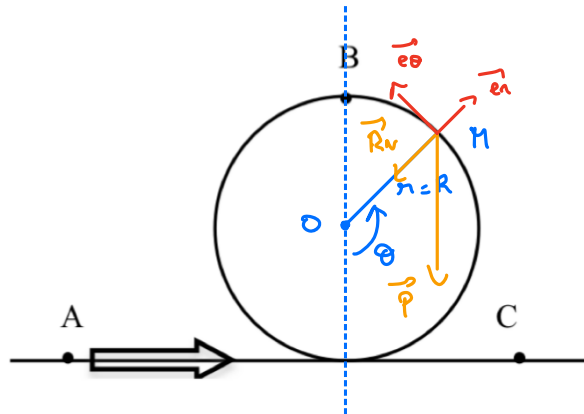
On peut ensuite utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour relier v_B et v_A :

$$e_{CA} + e_{PA} = e_{CB} + e_{PB} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + m g z_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g z_B$$

$$\text{D'où } v_A^2 = v_B^2 + 2g(z_B - z_A). \text{ Or, } z_B - z_A = 2R \Rightarrow v_A^2 = gR + 2gR = 5gR$$

Donc $v_A = \sqrt{5gR}$ pour être à la limite du décollement, ainsi $\underline{v_0 = \sqrt{5gR}}$

En C, qui est à la même altitude que A, on retrouvera la même vitesse.



Exercice 6

On abandonne sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse alors sans frottements sur une distance L avant de rencontrer un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe. Déterminer la longueur maximale dont sera comprimé le ressort.

A est la position initiale

B est la position où le cube rentre en contact avec le ressort

C est la position où le cube est comprimé au maximum

$\Delta l_{\max}$, distance entre B et C, correspond à la compression maximale du ressort

Les forces qui s'exercent sont le poids (force conservatrice, $e_{pp} = mgz$) ; la réaction normale (ne travaille pas) et - à partir de B - le rappel élastique (force conservatrice, $e_{pe} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$) : l'énergie mécanique est conservée.

On exploite $e_{ma} = e_{mc}$: $e_{ca} + e_{ppa} + e_{pea} = e_{cc} + e_{ppc} + e_{pec}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\rightarrow \frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2$
 0 : vitesse nulle en A mgz_A 0 : pos en contact avec le ressort mgz_B
 (il est donc à sa longueur à vide)
 0 : vitesse nulle en C en compression max (longueur extrême $\Rightarrow$ vitesse nulle)

On en déduit que $mgz_A = mgz_B + \frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2$

Donc, $\sin(\alpha) = \frac{z_A - z_B}{L + \Delta l_{\max}}$ donc $mg \sin(\alpha) (L + \Delta l_{\max}) = \frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2$

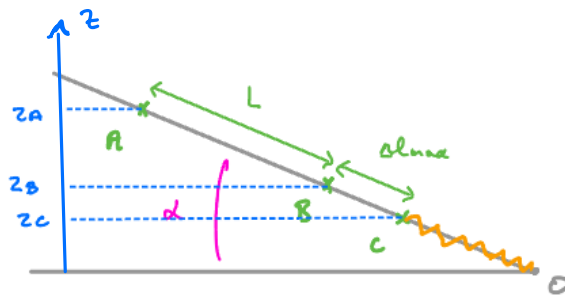
On note $x = \Delta l_{\max}$ (pour simplifier les notations ...), donc on vérifie :

$$mg \sin \alpha L + mg \sin \alpha x = \frac{1}{2} k x^2, \text{ soit } x^2 - \frac{2mg \sin \alpha}{k} x - \frac{2mg \sin \alpha}{k} L = 0$$

ou encore $x^2 - \alpha x - \alpha L = 0$ avec $\alpha = \frac{2mg \sin \alpha}{k}$

Solutions : $x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha L}$ on garde la solution positive ...

Enfinement, $\Delta l_{\max} = \frac{mg \sin \alpha}{k} + \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k} \left(\frac{mg \sin \alpha}{k} + 2L \right)}$



Exercice 7

1. Etablir l'équation différentielle pour une masse ponctuelle m accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k (l'autre extrémité restant immobile), le mouvement étant horizontal et sans frottements.

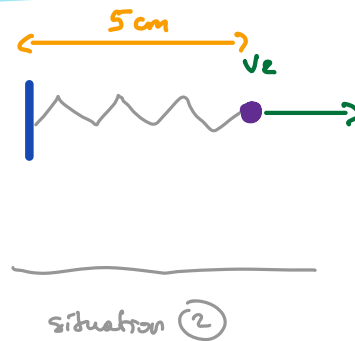
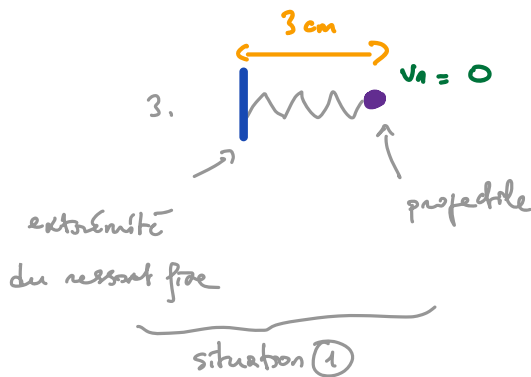
2. Le ressort est, pour cette question, vertical. Si l'on suspend une masse de $100g$ à l'extrémité du ressort, il s'allonge de $1cm$. Calculer sa constante de raideur.

3. Ce ressort est utilisé pour propulser un projectile de masse $10g$. Sa longueur à vide est de $5cm$ et il est initialement comprimé à une longueur de $3cm$. Quelle est la vitesse du projectile lorsqu'il quitte le contact avec le ressort ? (on néglige toute inertie du ressort lui-même).

4. Combien de temps dure la détente du ressort ?

1. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

2. $f = k \Delta l$, on trouve $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$



l'inertie du ressort étant négligée, le projectile quitte le contact avec le ressort lorsque celui-ci atteint sa longueur à vide.

on exploite la conservation de l'énergie mécanique :

$$\underbrace{e_{c1}}_{=0} + \underbrace{e_{p1}}_{=0} = \underbrace{e_{c2}}_{=0} + \underbrace{e_{p2}}_{=0} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \quad \text{avec} \quad \Delta l = 2 \text{ cm}$$

A.N : $v_2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4. La détente du ressort correspond au quart d'une période d'oscillation avec la masse (le projectile) accrochée au ressort.

Donc $\Delta t = T/4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ A.N : $\Delta t = 5 \text{ ms}$

Exercice 8

On considère un oscillateur « harmonique » masse + ressort horizontal, amorti par une force de frottement solide. On note m la masse, k la constante de raideur, g l'accélération de la pesanteur et μ le coefficient de frottement solide. On repère par la coordonnée x la position de la masse, et on prend l'origine au niveau de la position d'équilibre.

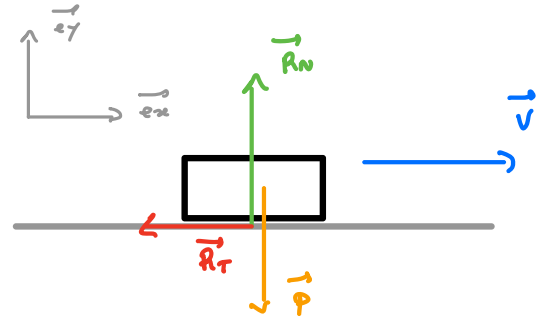
- Donner, en fonction de g , m et μ , l'expression de l'intensité de la force de frottement solide (lorsqu'il y a glissement).
- Donner l'équation différentielle du mouvement de la masse. Distinguer deux cas, selon que la masse se déplace vers la gauche ou vers la droite.
- Montrer qu'il existe une zone $[-a, +a]$ où, si l'oscillateur atteint une vitesse nulle, il ne repart pas. Exprimer a en fonction de m , g , k et m .
- Initialement, $x = X_0$ (supérieur à a) et $v_x = 0$. Déterminer $x(T/2)$, où $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Déterminer $x(T)$ et $x(3T/2)$, en supposant qu'ils sont (en valeur absolue), supérieurs à a .
- Expliquer qualitativement quelle sera l'évolution ultérieure de l'oscillateur.
- Si $X_0 = 8,5a$, combien l'oscillateur effectue-t-il d'aller - retours avant de s'immobiliser ?

1. 2^e loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Projection $\vec{e}_y$: $0 = -mg + R_N$
 $\Rightarrow R_N = mg$

Or, si il y a glissement, $R_T = \mu R_N$

D'où $R_T = \mu mg$



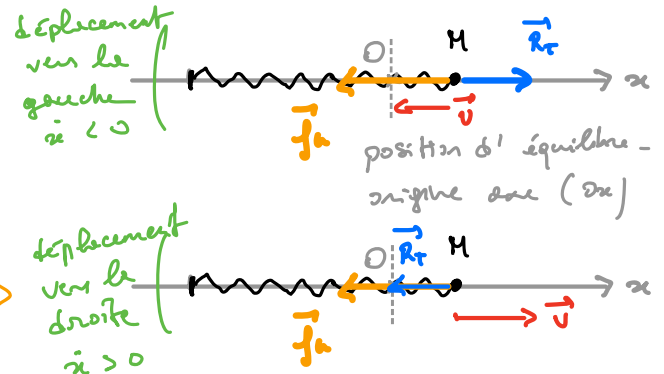
2. $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ se compensent.

Donc $m \vec{a} = \vec{f}_h + \vec{R}_T$

avec $\vec{f}_h = -kx \vec{e}_x$

$\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$

et $\vec{R}_T = \begin{cases} \mu mg \vec{e}_x & \text{si } \ddot{x} < 0 \\ -\mu mg \vec{e}_x & \text{si } \ddot{x} > 0 \end{cases}$



D'où ($\ddot{x} < 0$) : $m \ddot{x} = -kx + \mu mg$

soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g$ si $\ddot{x} < 0$ (1)

De même, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g$ si $\ddot{x} > 0$ (2)

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3. Si l'oscillateur est immobile, alors il ne repart que si $|k| > R_T$, donc si $k|x| > \mu mg \Rightarrow |x| > \frac{\mu mg}{k}$. On pose $a = \frac{\mu mg}{k}$, et donc l'objet ne repart pas si il s'arrête avec $x \in [-a, a]$.

4. avec $a = x_0$ et $\dot{x} = 0$, le mouvement va être vers la gauche.

donc on résout (1) : $x = \underbrace{x_m \cos(\omega t + \phi)}_{sh} + \underbrace{\frac{\mu g}{\omega^2}}_{sp}$ et $\frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu m g}{h} = a$

D'où $x = x_m \cos(\omega t + \phi) + a$

Les C.I imposent : $\begin{cases} x_0 = x_m \cos \phi + a \\ 0 = -\omega x_m \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_m + a \\ 0 = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m = x_0 - a \\ \phi = 0 \end{cases}$

D'où $x = (x_0 - a) \cos(\omega t) + a$

$x(t = T/2) = -(x_0 - 2a)$

l'amplitude du mouvement a diminué de $2a$.

5. Après $t = T/2$, l'oscillateur repart vers la droite.

On résout (2), en repartant de $t' = 0$:

$x = x_m \cos(\omega t' + \phi) - a$ et $\begin{cases} -x_0 + 2a = x_m \cos \phi - a \\ 0 = \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m = -(x_0 - 3a) \\ \phi = 0 \end{cases}$

D'où $x = -(x_0 - 3a) \cos(\omega t') - a$

$x(t = T) = x(t' = T/2) = x_0 - 4a$

à nouveau l'amplitude diminue de $2a$.

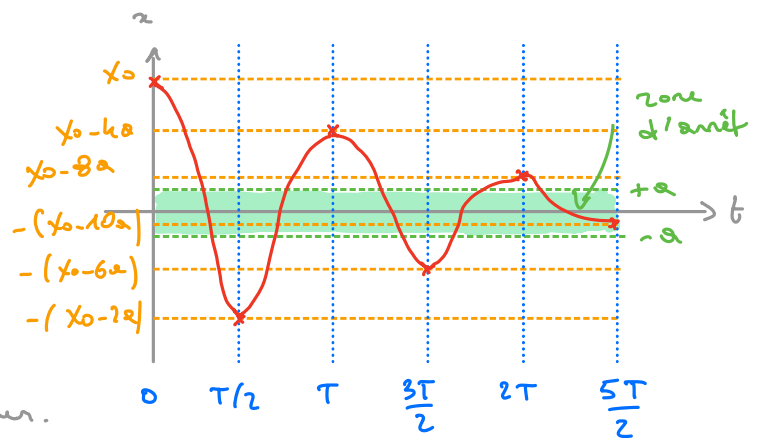
Pour $x(t = 3T/2)$, il suffit de reprendre la résolution du 4/.

$x(t = 3T/2) = -(x_0 - 6a)$

6. A chaque aller ou retour, l'amplitude diminue de $2a$, jusqu'à ce qu'elle soit inférieure à a .

7. Dans l'illustration ci-contre, x_0 serait un peu supérieure à $10a$, et on effectue 5 aller ou retour $\Rightarrow 2,5$ aller-retour.

Avec $x_0 = 8,5a$, on effectuera 4 aller ou retour $\Rightarrow 2$ aller-retour.



$8,5a \xrightarrow{\text{aller}} 6,5a \xrightarrow{\text{retour}} 4,5a \xrightarrow{\text{aller}} 2,5a \xrightarrow{\text{retour}} 0,5a \xrightarrow{\text{immobilisation}}$

Exercice 9

On s'intéresse aux oscillations d'une molécule HCl, dans l'approximation d'oscillations harmoniques. L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est donnée par :

$E_p(r) = C \cdot r^{-n} - \alpha e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$, où C , n , et α sont des constantes positives. Les valeurs, déterminées expérimentalement, sont : $C = 1,06 \cdot 10^{-138} \text{SI}$; $\alpha = 0,4$ et $n = 12$.

1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable et calculer la valeur de r correspondante.
2. Montrer que, dans l'approximation d'oscillations harmoniques, les forces associées à l'énergie potentielle donnée ci-dessus sont équivalentes à une force de rappel élastique et calculer la "constante de raideur".
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par r lors des oscillations harmoniques (on considérera que l'atome de Chlore est immobile).
4. En déduire la période propre de ces oscillations.

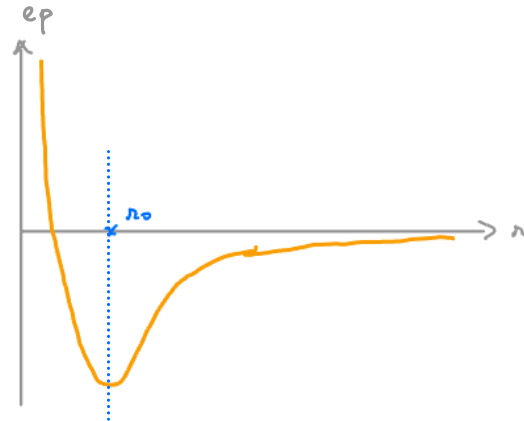
$$1. \quad e_p = C r^{-n} - \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

une position d'équilibre vérifie

$$\frac{de_p}{dr} = 0, \text{ ce qui donne :}$$

$$-n C r^{-n-1} + \frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$\text{Soit } r_0 = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 n C}{\alpha e^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$



le terme répulsif
 $C r^{-12}$ domine

le terme attractif
 $-\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ domine

A.N : $r_0 = 1,27 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$\rightarrow$ c'est un ordre de grandeur cohérent, puisque cela représente une longueur de liaison -

cette position d'équilibre est stable $\Rightarrow \frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0) > 0$.

$$\text{On, } \frac{d^2 e_p}{dr^2} = n(n+1) C r^{-n-2} - \frac{2 \alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

A.N : $\frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0) = 492 \text{ N.m}^{-1}$ c'est bien positif
 $\Rightarrow$ eq. stable

2. On a vu que l'on pourrait faire un DL à l'ordre 2 autour de r_0 :

$$e_p(r) = e_p(r_0) + \underbrace{\frac{de_p}{dr}(r_0)}_{=0} (r-r_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0)}_{>0} (r-r_0)^2$$

donc $e_p(r) = c^{\text{eq}} + \frac{1}{2} k (r-r_0)^2$ avec $k = \frac{d^2 e_p}{dr^2}(r_0) \Rightarrow$ force en $k(r-r_0)$
donc rappel élastique

$$3. \quad e_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + c^{\text{eq}} + \frac{1}{2} k (r-r_0)^2$$

$$e_m = c^{\text{eq}} \text{ donc } \frac{1}{2} m \cdot 2 \dot{r} \ddot{r} + \frac{1}{2} k \cdot 2 (r-r_0) \dot{r} = 0 \Rightarrow \underline{m \ddot{r} + k r = k r_0}$$

4. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, l'eq. diff devient $\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

A.N : $T = 1,16 \cdot 10^{-14} \text{ s}$