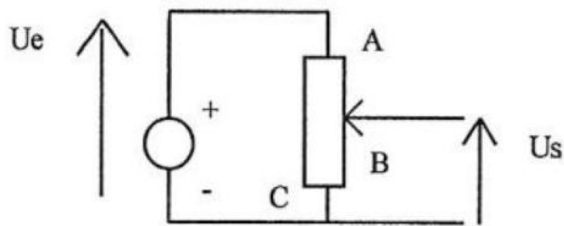


Exercice 1

On considère le montage potentiométrique dessiné ci-contre. On note $R_{AC} = R_t$ la résistance totale du potentiomètre et $R_{BC} = xR_t$ (x variant entre 0 et 1) la résistance entre les points B et C .



1. Calculer U_s , le circuit restant ouvert entre B et C .
2. Calculer U_s , une résistance R_0 (charge) étant branchée entre B et C . Qu'obtient-on dans le cas où $R_0 \gg R_t$?

1.



pont diviseur de tension :

$$U_s = \frac{x R_t}{x R_t + (1-x) R_t} U_e \quad \text{donc} \quad \boxed{U_s = x U_e}$$

2. Avec une charge R_0 branchée en sortie :



On associe $x R_t$ et R_0 en dérivation : $R_{eq} = \frac{x R_t R_0}{x R_t + R_0}$

Ensuite, on peut utiliser à nouveau le pont diviseur de tension :

$$U_s = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + (1-x) R_t} U_e$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \frac{R_{eq}}{R_{eq} + (1-x) R_t} &= \frac{\frac{x R_t R_0}{x R_t + R_0}}{\frac{x R_t R_0}{x R_t + R_0} + (1-x) R_t} = \frac{x \cancel{R_t} R_0}{x \cancel{R_t} R_0 + (1-x) \cancel{R_t} (x R_t + R_0)} \\ &= \frac{x R_0}{x R_0 + (1-x) x R_t + R_0 - \cancel{R_0} x} = \frac{x}{1 + \frac{x(1-x) R_t}{R_0}} \end{aligned}$$

Enfin,
$$\boxed{U_s = \frac{x U_e}{1 + x(1-x) \frac{R_t}{R_0}}}$$

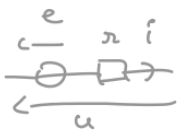
Si $R_0 \gg R_t$, $x(1-x) \frac{R_t}{R_0} \ll 1$
(car $x(1-x)$ est borné)

et donc $U_s \approx x U_e$: on retrouve le cas "à vide" car quasiment aucun courant ne passe par R_0 .

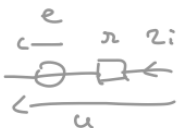
Exercice 2

On considère une batterie de fém $e = 24 \text{ V}$ et de résistance interne r . Elle fonctionne d'abord en récepteur et reçoit une puissance $p = 180 \text{ W}$ sous une intensité I . Elle fonctionne ensuite en générateur, débite une intensité $2I$ et fournit la même puissance p .

1. Représenter la caractéristique en convention générateur, et préciser dans quel domaine de cette caractéristique on se trouve pour l'un et l'autre mode de fonctionnement.
2. Calculer la résistance interne r .

- fonctionnement récepteur :  en fonctionnement récepteur, le courant circule en sens inverse de la fém

On est en convention récepteur, donc p (puissance reçue par la batterie)
 S'écrit $p = u i$ or, $u = e + r i$ (résistance r en convention récepteur)
 donc $p = (e + r i) i$ soit $p = e i + r i^2$ (1)

- fonctionnement récepteur :  en fonctionnement générateur, le courant circule dans le même sens que la fém

On est en convention générateur donc p (puissance cédée par la batterie)
 S'écrit $p = u (2i)$ or, $u = e - r (2i)$ (résistance r en convention générateur)
 donc $p = (e - 2 r i) 2i$ soit $p = 2 e i - 4 r i^2$ (2)

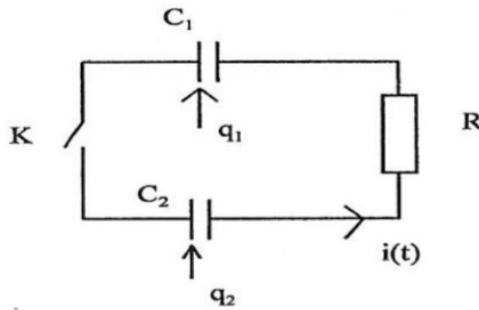
On conclut en exploitant (1) et (2), par exemple $4 \times (1) + (2)$:

$$5p = 4 e i + 4 r i^2 + 2 e i - 4 r i^2 = 6 e i \quad \text{donc } i = \frac{5p}{6e} \quad \text{A.N : } i = 6,25 \text{ A}$$

On peut ensuite déduire r de (1) ou (2) : $r = 0,768 \Omega$

Exercice 3

On considère le montage ci-contre. Initialement $q_1 = q_0$ et $q_2 = 0$. A l'instant $t = 0$, on ferme K.



1. Montrer que, tout au long du régime transitoire, $q_1 + q_2 = q_0$
2. Prévoir qualitativement la relation entre q_1 et q_2 à l'équilibre. En déduire q_1 et q_2 à l'équilibre.
3. Déterminer l'évolution de $i(t)$ pour $t > 0$.
4. Déterminer l'évolution de q_1 et q_2 ; donner leur représentation graphique.
5. Calculer l'énergie perdue par effet Joule entre $t = 0$ et l'équilibre.

1. $i = \frac{dq_2}{dt}$ et $i = -\frac{dq_1}{dt}$ (attention au signe !)

donc $\frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}$, donc $\frac{d}{dt}(q_1 + q_2) = 0$, donc $q_1 + q_2 = c^{ste}$

Or, à $t = 0$, $q_1 + q_2 = q_0 + 0 = q_0$. Donc, $\forall t$, $q_1 + q_2 = q_0$

2. A l'équilibre, régime stationnaire. Donc $i = 0$ (le condensateur ne laisse pas passer un courant continu). Donc $u_R = 0$, et donc $u_1 = u_2$ (loi des mailles)

D'où $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$ et en combinant avec $q_1 + q_2 = q_0$, on obtient :

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_0 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_0$$

3. Loi des mailles : $u_R + u_2 - u_1 = 0$

Or, $u_R = Ri$; $u_2 = \frac{q_2}{C_2}$ et $u_1 = \frac{q_1}{C_1}$ donc $Ri + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1} = 0$

On dérive : $R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_2} \frac{dq_2}{dt} - \frac{1}{C_1} \frac{dq_1}{dt} = 0$ soit $R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_2} i + \frac{1}{C_1} i = 0$

Soit $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$ avec $\tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Solution : $i = A e^{-t/\tau}$

il faut la c.t sur i pour déterminer A :

A $t = 0^+$, $u_R = u_1 - u_2$ donc $Ri = \frac{q_0}{C_1} + 0$ et donc $i = \frac{q_0}{RC_1}$

La c.t est $i(t=0) = \frac{q_0}{RC_1}$ attention, pas de continuité pour i (pas de bobine), qui conduirait à $i(t=0) = 0$!

On trouve ainsi $A = \frac{q_0}{RC_1}$

et donc $i = \frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}$

4. On peut trouver q_1 via $i = -\frac{dq_1}{dt}$ et en intégrant :

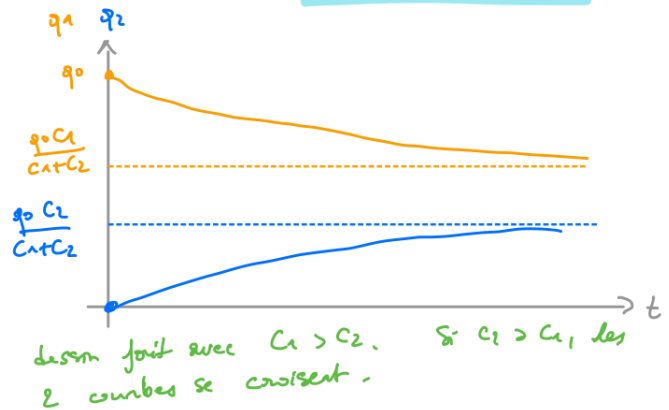
$$q_1 = - \int i dt + C^{\text{ste}} = - \underbrace{\frac{q_0}{RC_1}}_{= \frac{q_0 T}{RC_1}} (-\tau) e^{-t/\tau} + C^{\text{ste}} = \frac{q_0 T}{RC_1} = \frac{q_0}{RC_1} \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}$$

donc $q_1 = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} + C^{\text{ste}}$ et $q_1(t=0) = q_0$ donc $q_0 = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} + C^{\text{ste}}$
ce qui donne $C^{\text{ste}} = \frac{q_0 C_1}{C_1 + C_2}$

finalement, $q_1 = \frac{q_0}{C_1 + C_2} (C_1 + C_2 e^{-t/\tau})$

On peut ensuite déduire q_2 de $q_1 + q_2 = q_0$, ce qui donne $q_2 = \frac{q_0 C_1}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau}$

On peut vérifier que en faisant $t \rightarrow \infty$ on retrouve bien les résultats de la question 2.



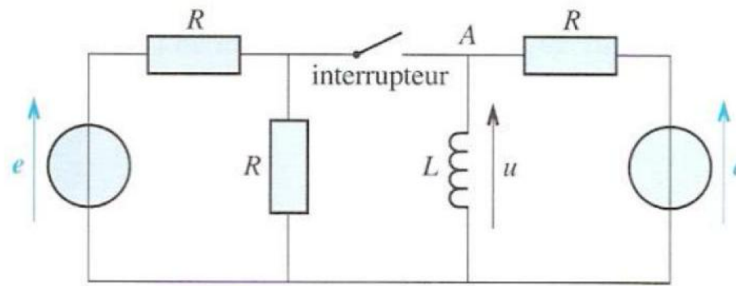
5. Il suffit de faire la différence entre l'énergie initialement stockée dans les condensateurs et celle stockée pour $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} E_{\text{dissipée}} &= E_{\text{stockée}}(t=0) - E_{\text{stockée}}(t \rightarrow \infty) \\ &= \frac{q_0^2}{2C_1} - \left(\left(\frac{q_0 C_1}{C_1 + C_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2C_1} + \left(\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2C_2} \right) \\ &= \frac{q_0^2}{2} \left[\frac{1}{C_1} - \frac{C_1}{(C_1 + C_2)^2} - \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2} \right] \\ &= \frac{q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)^2} \left[(C_1 + C_2)^2 - C_1^2 - C_1 C_2 \right] \\ &= \frac{q_0^2}{2C_1(C_1 + C_2)^2} \left[C_1 C_2 + C_2^2 \right] \\ &= \frac{q_0^2 C_2 (C_1 + C_2)}{2C_1(C_1 + C_2)^2} \end{aligned}$$

Donc $E_{\text{dissipée}} = \frac{q_0^2 C_2}{2C_1(C_1 + C_2)}$

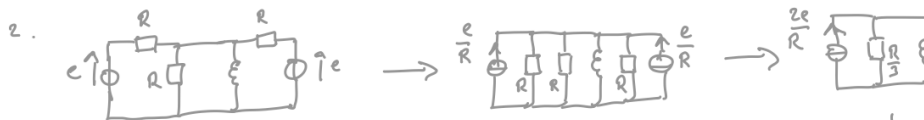
Exercice 4

On considère le circuit représenté ci-dessous. A $t=0$ on ferme l'interrupteur.



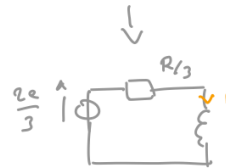
1. Quelle est la condition initiale sur la l'intensité du courant électrique qui circule dans la bobine
2. Réduire le circuit (lorsque l'interrupteur est fermé) à un générateur de thévenin branché aux bornes de la bobine
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant électrique qui circule dans la bobine, notée i
4. Donner l'expression et tracer l'allure de i
5. Pouvaient-on prévoir sans calcul la valeur de i après un temps ' très long', ?
6. Déterminer l'expression de la tension aux bornes de la bobine, notée u
7. Comment pourrait-on trouver directement la condition initiale sur u (juste après la fermeture de l'interrupteur)

1. Avant la fermeture de l'interrupteur, $i = \frac{e}{R}$ et la bobine impose la continuité, donc $i(t=0) = \frac{e}{R}$



3. $L \frac{di}{dt} + \frac{R}{3} i = \frac{2e}{3}$

soit $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{2e}{3L}$ avec $\tau = \frac{3L}{R}$



4. $i = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{2e}{R}$ et $i(t=0) = \frac{e}{R}$ donc $\frac{e}{R} = \lambda + \frac{2e}{R} \Rightarrow \lambda = -\frac{e}{R}$

donc $i = \frac{e}{R} (2 - e^{-t/\tau})$

5. Oui, "après un temps très long" régime stationnaire donc bobine $\rightarrow$ court-circuit



6. $u = L \frac{di}{dt} = -\frac{L}{R} \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau}$

donc $u = \frac{e}{3} e^{-t/\tau}$

7. c-à-d sur u :

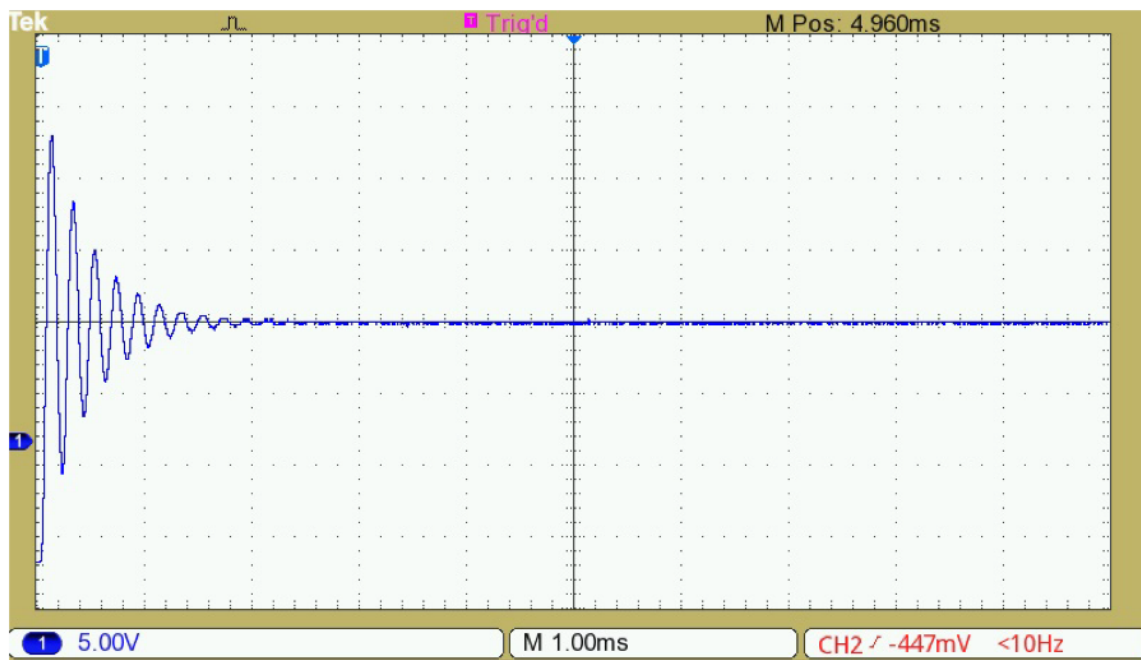
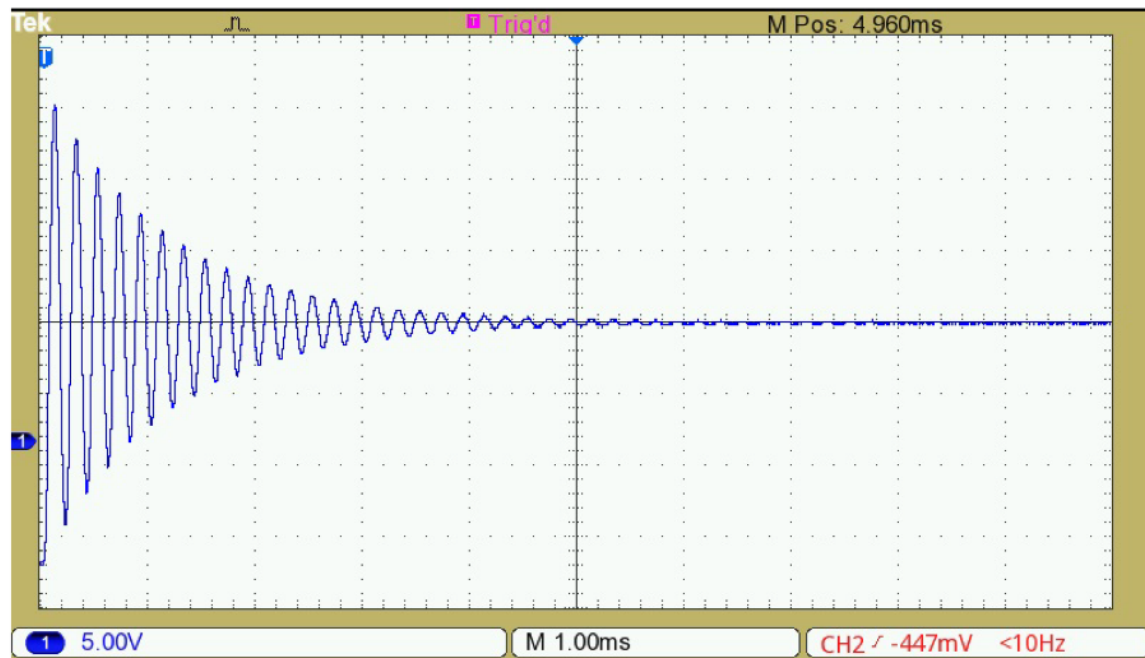
$u = \frac{2e}{3} - \frac{R}{3} i$
 et $i(t=0) = \frac{e}{R}$ donc $u(t=0) = \frac{2e}{3} - \frac{R}{3} \frac{e}{R}$
 soit $u(t=0) = \frac{e}{3}$ cohérent avec la question 6.

Exercice 5

On considère un circuit RLC série refermé par un interrupteur K . Le condensateur est initialement chargé (charge q_0) et à l'instant $t = 0$ on ferme K .

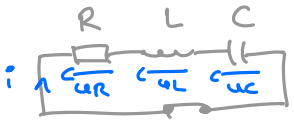
1. Donner un analogue mécanique à cette situation.
2. Faire un schéma et établir l'équation vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. Introduire la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q et donner leurs expressions en fonction de R , L et C .

On donne ci-dessous deux enregistrements :



1. analogue mécanique : oscillateur masse-ressort avec frottement fluide.
C.I : vitesse nulle et élongation initiale. A $t=0$ on lâche la masse.

2.



loi des mailles : $u_R + u_L + u_C = 0$
Avec $u_C = u$; $u_R = Ri = R \frac{dq}{dt} = RC \frac{du}{dt}$
et $u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2u}{dt^2}$

D'où $LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + u = 0$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, on obtient : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + u = 0$

3. Régime pseudo périodique - Donc $Q > \frac{1}{2}$.

Q est élevé pour le 1^{er} enregistrement (le temps de relaxation $\uparrow$ avec Q).

Grossièrement, Q est de l'ordre du nombre d'oscillations visibles.

Donc respectivement de l'ordre de 20 et 10.

4. Solutions de la forme e^{rt} , donc r doit vérifier $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
 $Q > \frac{1}{2}$ donc $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 1 \right) < 0 \rightarrow r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Soit $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$

Cela conduit à $u = U_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi)$

Les C.I donnent alors $\begin{cases} U_m \cos \phi = u_0 \\ U_m (-1/\tau \cos \phi - \omega \sin \phi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_m = u_0 / \cos \phi \\ \tan(\phi) = -1/\omega\tau \end{cases}$

5. Premier enregistrement : $T = 0,2 \text{ ms} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 3.10^4 \text{ s}^{-1}$.

On peut évaluer τ via : $\frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{U_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi)}{U_m e^{-(t+T)/\tau} \cos(\omega(t+T) + \phi)} = e^{T/\tau}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = T/\tau \Rightarrow \tau = \frac{T}{\ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)}$ où $u(t)$ et $u(t+T)$ sont les valeurs de 2 max successifs.

Par exemple 15V et 12,5V. On en déduit $\tau = 1,1 \text{ ms}$

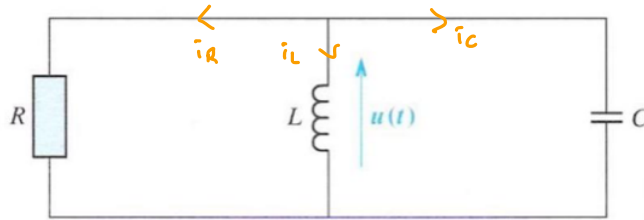
On a déjà vu que Q est au moins de l'ordre de 10, donc ω et ω_0 sont très proches (calculer par exemple $\sqrt{1 - 1/4Q^2}$ avec $Q = 10$ pour s'en convaincre).

Ainsi, $\omega_0 \approx 3.10^4 \text{ s}^{-1}$.

Et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 \tau}{2}$, ce qui donne $Q = 16$

Exercice 6

On considère le circuit RLC parallèle représenté ci-dessous, avec $R = 10\text{k}\Omega$; $L = 100\text{mH}$ et $C = 0,1\mu\text{F}$.



1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$
2. La mettre sous la forme : $(d^2u/dt^2) + (\omega_0/Q)(du/dt) + \omega_0^2 u = 0$ en donnant les expressions et les valeurs numériques de ω_0 et Q
3. Donner la forme générale de la solution
4. Les conditions initiales sont : charge du condensateur $1\mu\text{F}$ et intensité du courant dans la bobine 2mA . Déterminer numériquement $u(t)$.

1. loi des nœuds : $i_R + i_L + i_C = 0$

on a $i_R = \frac{u}{R}$; $i_C = C \frac{du}{dt}$ et $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$

On dérive l'équation précédente : $\frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} = 0$

soit $\frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} + C \frac{d^2u}{dt^2} = 0$

2. soit $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0$ on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$

finallement : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$

$Q = RC\omega_0$

A.N : $\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ $Q = 10$

ce n'est pas la même expression que pour le RLC série !

3. Régime pseudo-périodique ($Q = 10$), donc :

$u = u_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi)$

4. La bobine impose la continuité de i_L , et le condensateur celle de q .

Donc $i_L(t=0) = 2\text{mA}$ et $q(t=0) = 1\mu\text{C}$

On a donc $u(t=0) = 10\text{V}$, que l'on note u_0 .

On a également besoin de $\frac{du}{dt}(t=0)$: $i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$, donc $\frac{du}{dt}(t=0) = \frac{1}{C} i_C(t=0)$

On obtient $i_C(t=0)$ avec la loi des nœuds :

$i_C(t=0) = -i_R(t=0) - i_L(t=0)$, on connaît $i_L(t=0)$ et $i_R(t=0) = \frac{u(t=0)}{R}$

d'où $i_C(t=0) = -0,002 - \frac{10}{10^4} = -0,003\text{A}$ (-3mA), que l'on note i_0

soit, $\frac{du}{dt}(t=0) = \frac{i_0}{C}$

On a donc les c.i. $\begin{cases} u(t=0) = u_0 & (u_0 > 0) \\ \frac{du}{dt}(t=0) = \frac{i_0}{C} & (i_0 < 0) \end{cases}$

On applique ces c.i. à la condition donnée en (3),

sachant que $\frac{du}{dt} = u_m e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \cos(\omega t + \phi) - \omega \sin(\omega t + \phi) \right)$:

$\begin{cases} u_m \cos(\phi) = u_0 & (1) \\ -u_m \left(\frac{1}{\tau} \cos(\phi) + \omega \sin(\phi) \right) = i_0/C & (2) \end{cases}$

d'où $-\frac{u_0}{\cos(\phi)} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\phi) + \omega \sin(\phi) \right) = \frac{i_0}{C}$

soit $\frac{1}{\tau} + \omega \tan(\phi) = -\frac{i_0}{C u_0}$ et donc $\phi = \arctan \left(-\frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{i_0}{C u_0} \right) \right)$

A.N : $\phi = 0,25 \text{ rad} = 14^\circ$

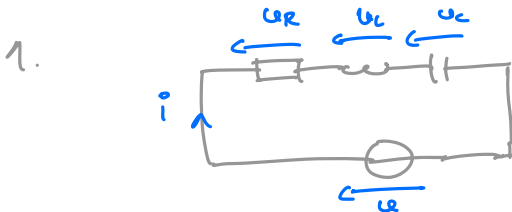
(on veut bien $\cos(\phi) > 0$, puisque $u_0 > 0$).

et on en déduit ensuite $u_m = 10,3\text{V}$.

Exercice 7

On considère un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale $u = U_m \cos(\omega t)$.

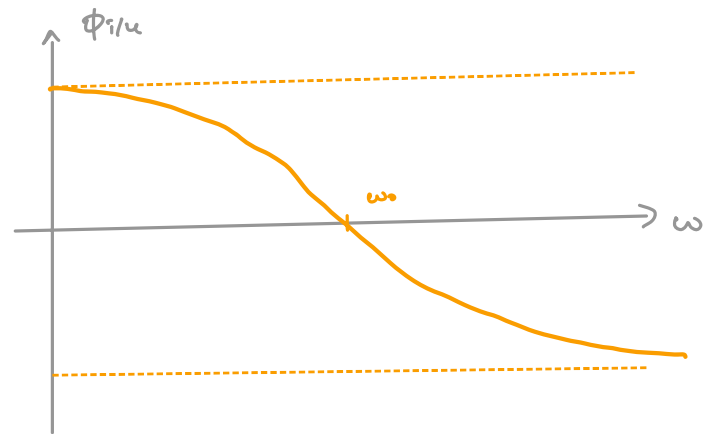
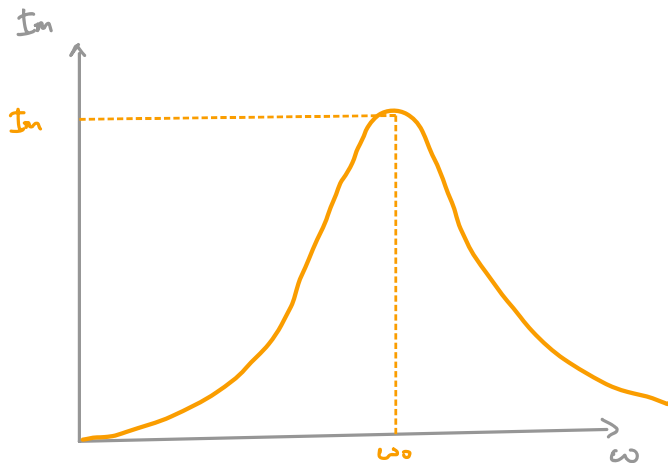
1. Faire un schéma et indiquer le courant i en convention récepteur.
2. Déterminer l'impédance complexe Z de l'association RLC série.
3. Déterminer l'amplitude I_m et le déphasage $\phi_{i/u}$, et tracer leurs graphes en fonction de ω .
4. Déterminer l'amplitude U_{Cm} de la tension u_C aux bornes du condensateur.
5. A quelle condition (portant sur R , L et C) y a-t-il un phénomène de résonance pour u_C ?
6. Tracer dans ce cas U_{Cm} en fonction de ω .



$$2. \underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$3. \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \quad \text{donc} \quad U_m = |\underline{Z}| I_m \Rightarrow I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}$$

$$\text{et } \phi_{i/u} = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right) \Rightarrow \phi_{i/u} = -\arctan\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right)$$



$$4. \underline{u}_C = \underline{Z}_C \underline{i} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} \Rightarrow U_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega} \quad \text{donc} \quad U_{Cm} = \frac{U_m}{C\omega \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}$$

5. Résonance si $U_{Cm} = f(\omega)$ présente un maximum -
Donc $C^2 \omega^2 (R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2)$ en fait de ω présente un minimum -

On dérive, donc il faut : $2\omega(R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2) + \omega^2 \cdot 2(L\omega - 1/C\omega)(L + 1/C\omega) = 0$

Soit $2\omega[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)(L\omega - 1/C\omega + L\omega + 1/C\omega)] = 0$

On garde la solution différente de 0 :

$$R^2 + 2 L \omega (L \omega - 1/C \omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^2}{2} + (L \omega)^2 - \frac{L}{C} = 0$$

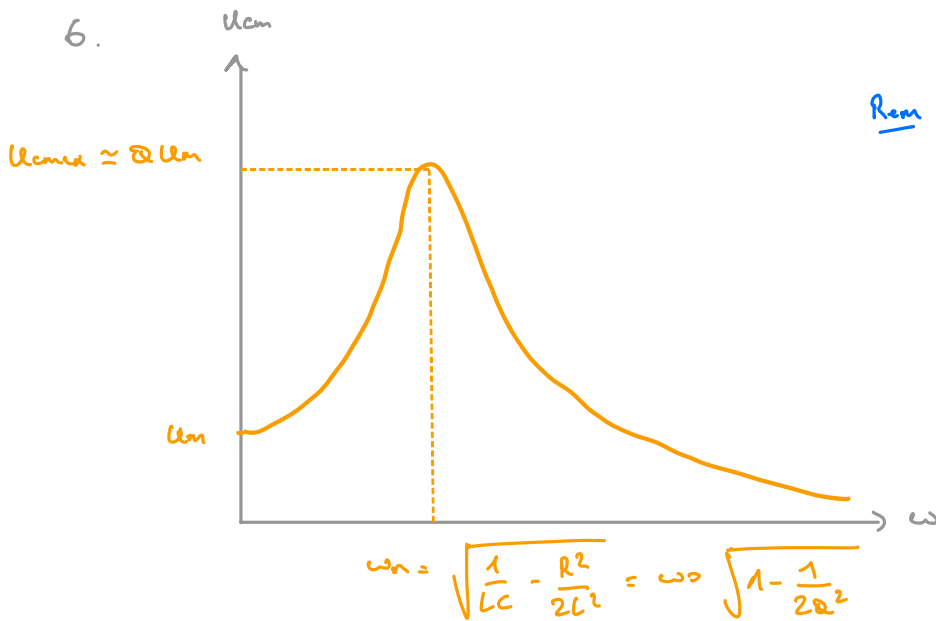
$$\Leftrightarrow (L \omega)^2 = \frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

il faut donc $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{2L^2}$ pour qu'il y ait résonance

Rem : en introduisant ω_0 et Q , cela donne $\omega^2 > \frac{\omega_0^2}{2Q^2}$ $(Q = \frac{L \omega_0}{R} \Rightarrow \frac{R^2}{L^2} = \frac{\omega_0^2}{Q^2})$
 et donc $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.

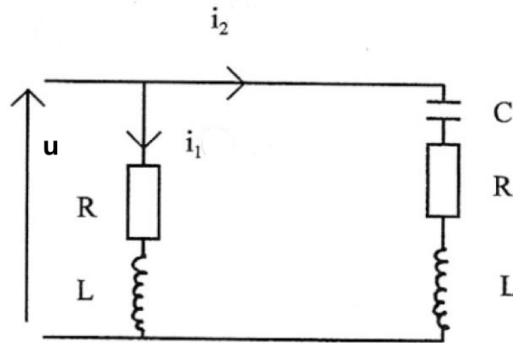


Rem : il est intéressant de faire le rapprochement entre cette résonance pour la tension aux bornes du condensateur et la résonance en élongation du ressort pour le système masse-ressort amorti.

Exercice 8

Dans ce circuit, $u = U_m \cos(\omega t)$

- Déterminer les amplitudes et les déphasages par rapport à u des courants i_1 et i_2 .
- Entre i_1 et i_2 , qui est en avance sur l'autre ?
- Rappeler le lien entre amplitude et valeur efficace pour un signal sinusoïdal.
- On veut que i_1 et i_2 aient même valeur efficace et soient en quadrature. Montrer qu'il faut que $R = L\omega$ et $2R = 1/(C\omega)$



1- On pose :

$$i_1 = I_{1m} \cos(\omega t + \phi_1)$$

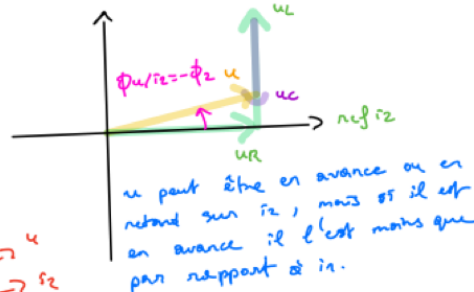
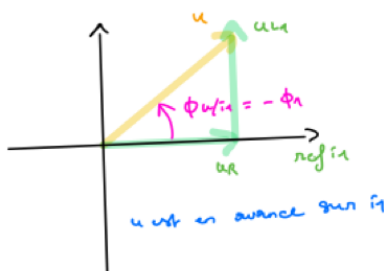
$$i_2 = I_{2m} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$u = (R + jL\omega) i_1 \quad \text{donc} \quad I_{1m} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_1 = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

$$u = \left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) i_2 \quad \text{donc} \quad I_{2m} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_2 = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

2. même valeur efficace, donc même amplitude : $I_{1m} = I_{2m}$.
 d'où $(L\omega)^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ et donc $L\omega = -\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \Rightarrow 2L\omega = \frac{1}{C\omega}$ (1)

On veut que i_1 et i_2 soient en quadrature, mais qui est en avance sur l'autre ? On peut faire 2 diagrammes de Fresnel :



On en conclut que i_2 est en avance sur i_1

C'est i_2 qui est en avance sur i_1 , donc $\phi_{i_2/i_1} = \phi_{i_2/u} + \phi_{u/i_1}$

$$= \phi_2 - \phi_1$$

Donc $\phi_2 - \phi_1 = \pi/2$, soit $\phi_2 = \phi_1 + \pi/2$

$$\text{On, } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

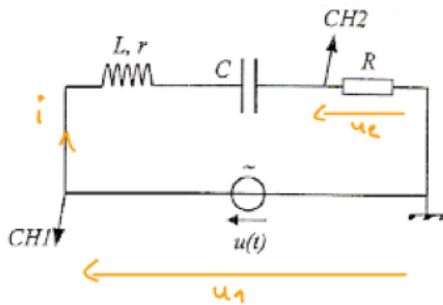
$$\text{donc } \tan(\phi_2) = -\frac{1}{\tan(\phi_1)}, \text{ d'où } -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R} = \frac{R}{L\omega}$$

et donc $L\omega\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) = R^2$ (2)
 En combinant (1) et (2) on trouve $L\omega = R$,
 d'où les résultats de l'énoncé.

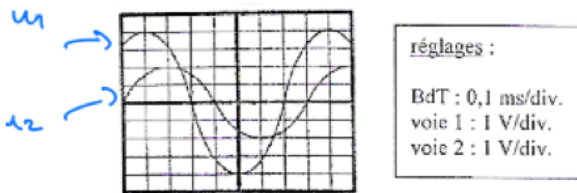
Exercice 9

On considère un montage RLC série avec $R = 50\Omega$ et $C = 1\mu F$. Avec un oscilloscope, on visualise les tensions aux bornes de R et aux bornes de l'ensemble, comme indiqué ci-dessous.

En identifiant les deux courbes obtenues, déterminer les caractéristiques L et r de la bobine (on considère la résistance interne r de la bobine).



On voit que $T = 0,8 \text{ ms} \Rightarrow \omega = 2,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$



On relève sur cet enregistrement :

$$\begin{cases} \frac{U_{em}}{U_{2m}} = 2 \\ \phi_{u1/u2} = +\pi/4 \end{cases}$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \leftarrow \begin{matrix} 0,1 \text{ ms} \\ 0,8 \text{ ms} \end{matrix}$$

$$u_2 = R i \quad \text{donc} \quad U_{2m} = R I_m$$

$$u_1 = Z i \quad \text{avec} \quad Z = r + R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\text{donc} \quad U_{1m} = \sqrt{(r+R)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} I_m$$

$$\text{D'où} \quad \frac{U_{1m}}{U_{2m}} = \frac{\sqrt{(r+R)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}{R}$$

On voit que $\frac{U_{1m}}{U_{2m}} > 1$, d'où l'identification des courbes : u_1 correspond à la plus grande amplitude.

$$\text{On obtient une première relation :} \quad 4R^2 = (r+R)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad (1)$$

On exploite ensuite le déphasage :

$$\phi_{u1/u2} = \phi_{u1/i} \quad (\text{car } u_2 = Ri, \text{ donc } u_2 \text{ est en phase avec } i)$$

$$\text{Or, } \phi_{u1/u2} = \arg(Z) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r+R}\right)$$

$$\text{d'où, puisque } \tan(\phi_{u1/u2}) = \tan(\pi/4) = 1 :$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = r + R \quad (2)$$

Il suffit pour conclure de combiner (1) et (2) :

$$4R^2 = 2(r+R)^2 \quad \text{donc} \quad r = R(\sqrt{2} - 1) \quad R = 50\Omega$$

$$\text{A.N : } r = 20,7 \Omega$$

$$\text{Et } L = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C\omega} + r + R \right)$$

$$C = 1 \mu F \quad \omega = 2,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{A.N : } L = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ H} \quad (25 \text{ mH})$$