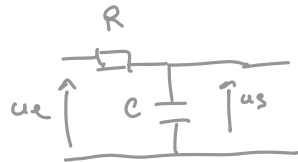


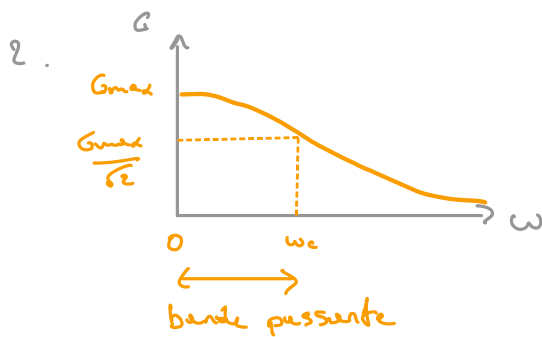
Exercice 1

- Donner le schéma d'un filtre passe bas RC du premier ordre et calculer sa fonction de transfert (à vide).
- Avec une capacité de $1nF$, que doit valoir la résistance pour avoir une bande passante de $100kHz$?
- On place maintenant une charge, résistance de $10k\Omega$, en sortie (entre la sortie et la masse). Le gain max et la bande passante sont-ils modifiés? Si oui, les calculer.

1.



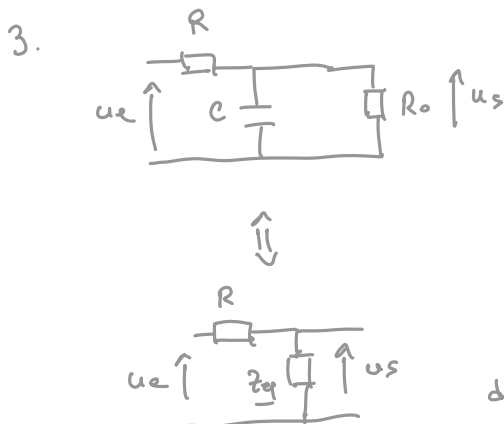
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$



Pour un filtre passe bas, la largeur de la bande passante est égale à la fréquence de coupure. Donc $f_c = 100 kHz$.

Donc, $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$

D'où $R = \frac{1}{2\pi C f_c}$ A.N : $R = 1,59 k\Omega$



R_o et C sont en dérivation. On calcule l'impédance équivalente à leur association:

$$Z_{eq} = \frac{R_o / j\omega C}{R_o + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_o}{1 + jR_o C \omega}$$

div. tension: $\underline{u_s} = \underline{u_e} \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}}$

D'où $\underline{H} = \frac{\frac{R_o}{1 + jR_o C \omega}}{\frac{R_o}{1 + jR_o C \omega} + R} = \frac{R_o}{R_o + R + jR_o R C \omega} = \frac{\frac{R_o}{R_o + R}}{1 + j \frac{R_o R}{R_o + R} C \omega}$

On peut poser $\underline{H} = \frac{H'_0}{1 + j\omega/\omega'_c}$ avec $H'_0 = \frac{R_o}{R_o + R}$ et $\omega'_c = \frac{R_o + R}{R_o R C}$

gain max pulsation de coupure

Le gain max et la bande passante (égale à la fréquence de coupure)

sont bien modifiés. A.N : $H'_0 = 0,86$ $f'_c = 116 kHz$

Exercice 2

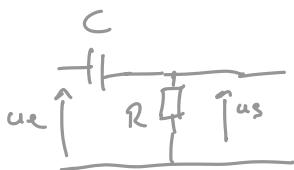
On considère un filtre RC passe haut du premier ordre fonctionnant à vide, avec $R = 1k\Omega$ et $C = 1\mu F$.

1. Faire un schéma et calculer la fonction de transfert.
2. Calculer la fréquence de coupure.

On envoie en entrée le signal (en volts, avec $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$) :

$$u_e = 10 + 5\cos(\omega_0 t) + 2\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$$

3. Déterminer le signal de sortie.

1. 
$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$
 on n'introduit pas tout de suite ω_c (question suivante...)

2. La pulsation de coupure ω_c est donnée par : $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$
 Or, ici $G_{\max} = 1$ (pour $\omega \rightarrow \infty$). Et $G = |\underline{H}|$.

Donc, ici $G_{\max} = 1$ (pour $\omega \rightarrow \infty$). Et $G = |\underline{H}|$.
 Or, on a $\frac{RC\omega_c}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + (RC\omega_c)^2 = 2(RC\omega_c)^2 \Rightarrow 1 = (RC\omega_c)^2$

Comme $\omega_c > 0$, cela donne $1 = RC\omega_c \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$ *A.N : $\omega_c = 10^3 \text{ s}^{-1}$*

3. On note $u_e = U_0 + U_1 \cos(\omega_0 t) + U_3 \cos(3\omega_0 t + \phi_3)$
 avec $U_0 = 10 \text{ V}$; $U_1 = 5 \text{ V}$; $U_3 = 2 \text{ V}$ et $\phi_1 = \pi/2$.

On pose $u_s = U_0' + U_1' \cos(\omega_0 t + \phi_1') + U_3' \cos(3\omega_0 t + \phi_3')$

Calcul des amplitudes et des phases :

$$U_0' = U_0 \cdot |\underline{H}(0)| = 0 \text{ V}$$

$$U_1' = U_1 |\underline{H}(\omega_0)| = U_1 \frac{\omega_0 / \omega_c}{\sqrt{1 + (\omega_0 / \omega_c)^2}}$$

A.N : $U_1' = 5 \times \frac{1/2}{\sqrt{1 + (1/2)^2}} = 2,2 \text{ V}$

$$\phi_1' = \phi_1 + \arg(\underline{H}(\omega_0)) = \pi/2 - \arctan(1/2) \quad \text{A.N : } \phi_1' = 1,1 \text{ rad}$$

$$U_3' = U_3 |\underline{H}(3\omega_0)| = U_3 \frac{3\omega_0 / \omega_c}{\sqrt{1 + (3\omega_0 / \omega_c)^2}}$$

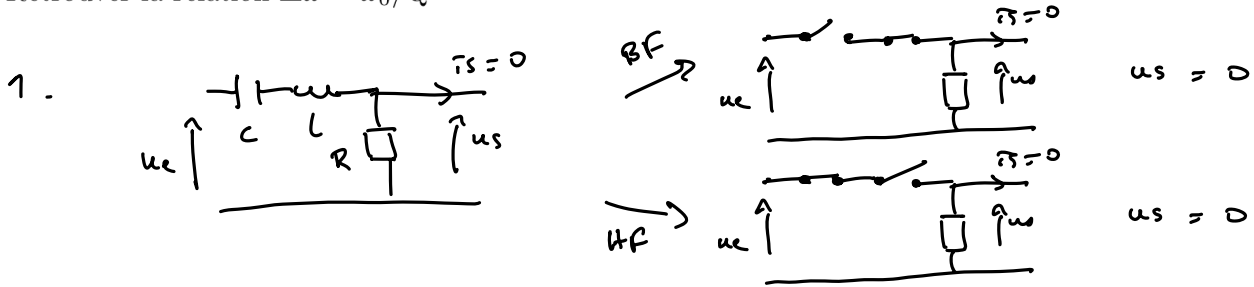
A.N : $U_3' = 2 \times \frac{3/2}{\sqrt{1 + (3/2)^2}} = 1,7 \text{ V}$

$$\phi_3' = \phi_3 + \arg(\underline{H}(3\omega_0)) = \pi/2 + \pi/2 - \arctan(3/2) \quad \text{A.N : } \phi_3' = 2,2 \text{ rad}$$

Exercice 3

On considère un filtre RLC passe bande.

1. Faire un schéma et analyser les cas HF et BF.
2. Etablir l'expression de la fonction de transfert en faisant apparaître ω_0 et Q .
3. Déterminer les fréquences de coupure.
4. Retrouver la relation $\Delta\omega = \omega_0/Q$



2. Calcul classique, en utilisant le pont diviseur de tension (cf cours)

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

3. On cherche x tq $|\underline{H}|(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc x vérifie :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

2 possibilités, condensées en $x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$, soit $x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$

2 équations, on a 4 solutions :

$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$ et le même pour les 2 équations, on a 4 solutions :

$x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, et on garde les 2 solutions positives :

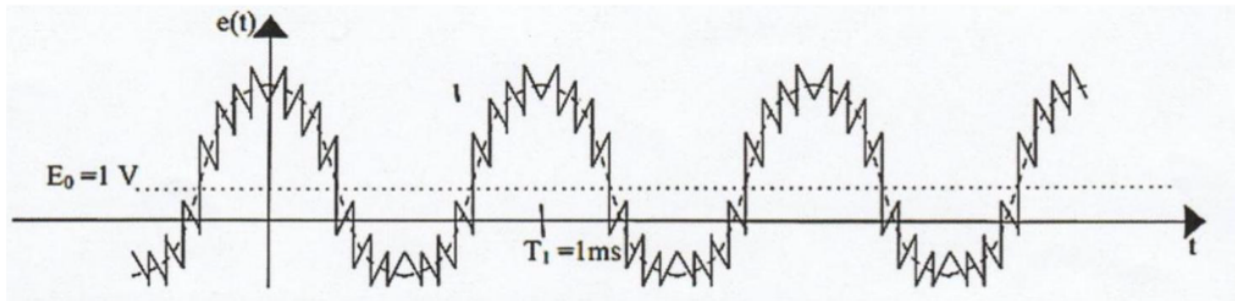
$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

4. $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \left(-\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) = \frac{1}{Q}$

Or, $\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, donc $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$, soit $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Exercice 4

Dans le signal s représenté ci-dessous, les parasites ont une fréquence de 20kHz et une amplitude de $0,1\text{V}$.

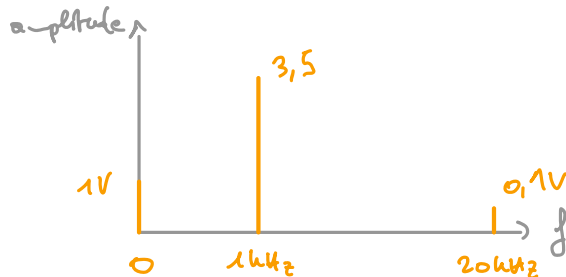


1. Représenter le spectre de ce signal et proposer une expression de s en fonction du temps.
2. On fait passer ce signal au travers de différents filtres. Donner dans chaque cas le spectre et la représentation temporelle en sortie du filtre.

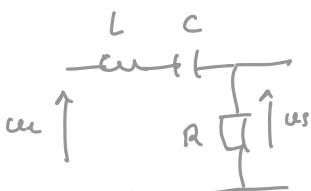
- (a) Passe-bas $f_c = 10\text{kHz}$
- (b) Passe-bas $f_c = 10\text{Hz}$
- (c) Passe-bande $f_0 = 1\text{kHz}$ et $\Delta f = 100\text{Hz}$
- (d) Passe-haut $f_c = 10\text{kHz}$
- (e) Passe-haut $f_c = 10\text{Hz}$

3. On veut réaliser le filtre (c) avec un circuit RLC série. Donner le schéma du filtre et calculer R et C pour $L = 100\text{mH}$.

1. $s(t) = E_0 + U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)$ avec $E_0 = 1\text{V}$; $U_1 \approx 3,5\text{V}$; $U_2 = 0,1\text{V}$
 $f_1 = 1\text{kHz}$ et $f_2 = 20\text{kHz}$



2.
 - (a) Passe-bas $f_c = 10\text{kHz}$ → on enlève les parasites HF
 - (b) Passe-bas $f_c = 10\text{Hz}$ → on ne garde que le continu
 - (c) Passe-bande $f_0 = 1\text{kHz}$ et $\Delta f = 100\text{Hz}$ → on enlève le continu et le HF
 - (d) Passe-haut $f_c = 10\text{kHz}$ → on ne garde que les parasites HF
 - (e) Passe-haut $f_c = 10\text{Hz}$ → on enlève le continu

3. 

$$H = \frac{1}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

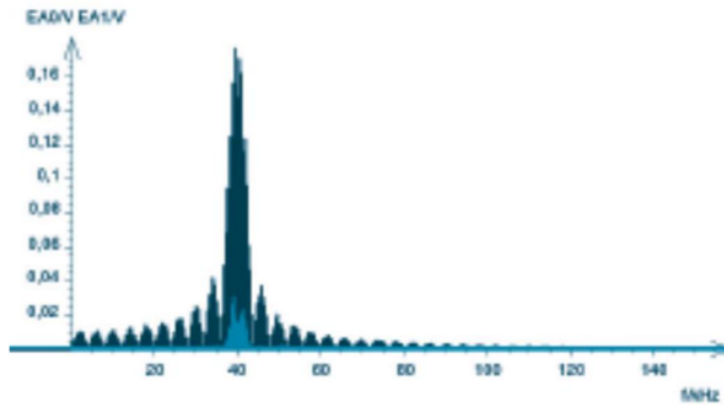
$f_0 = 1\text{kHz} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2}$ A.N : $C = 0,25\mu\text{F}$

$\Delta f = 100\text{Hz} \Rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 10 \Rightarrow R = \frac{L\omega_0}{Q}$ A.N : $R = 63\Omega$

Exercice 5

La figure ci-dessous donne les spectres du signal émis par un haut-parleur (foncé) et du signal reçu par un micro placé plus loin (clair).

1. Quel type de filtrage est réalisé entre les deux signaux ?
2. Estimer le facteur de qualité associé (en considérant qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2).



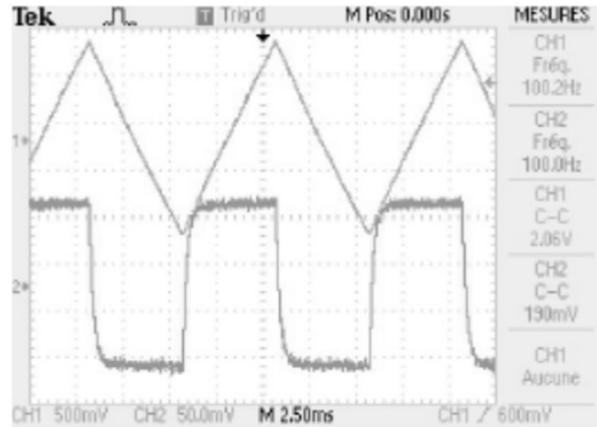
1. passe - bande
2. $f_0 = 40 \text{ kHz}$ et $\Delta f = 5 \text{ kHz}$, donc $Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = 8$

Exercice 6

On souhaite réaliser l'opération permettant de passer du signal de la voie 1 (triangles) à celui de la voie 2 représentés ci-dessous.

1. De quel type d'opération mathématique s'agit-il? En partant d'un filtre d'ordre 1, proposer un circuit RC permettant de la réaliser, en précisant dans quel domaine de fréquences (par rapport à la fréquence de coupure) il faut se situer.

2. En déduire une valeur adéquate pour la fréquence de coupure et proposer des valeurs possibles pour R et C.



1. dérivation. avec l'ordre 1, il faut un passe-haut en basse fréquence

$$\underline{H} = \frac{j\omega}{1+j\omega} \approx j\omega \Rightarrow \underline{u_s} = j\omega \underline{u_e} = \frac{1}{\omega_c} \frac{du_e}{dt} = RC \frac{du_e}{dt}$$

$$\omega < \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow u_s = RC \frac{du_e}{dt}$$

2. graphiquement, $\frac{du_e}{dt} = \pm \frac{2V}{5ms} = 400 V \cdot s^{-1}$

et $u_s = \pm 80 mV$ donc il faut $RC = 2 \cdot 10^{-4} s$

p.ex $R = 2 k\Omega$
 $C = 0,1 \mu F$

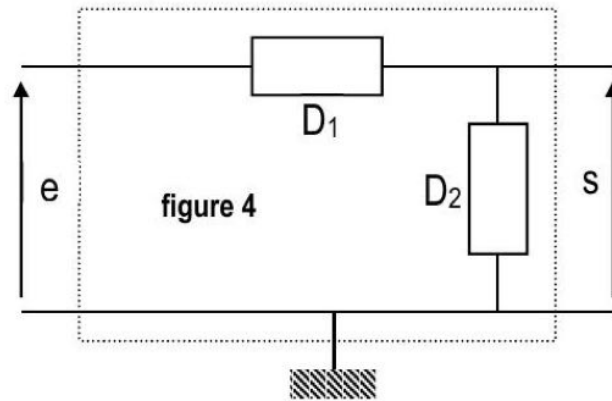
$\triangle$ $\omega_c = \frac{1}{RC} = 5000 s^{-1}$
 $\Rightarrow f_c = 800 Hz$

Donc, $f = 100 Hz$ on est donc bien dans la partie BF.

Exercice 7

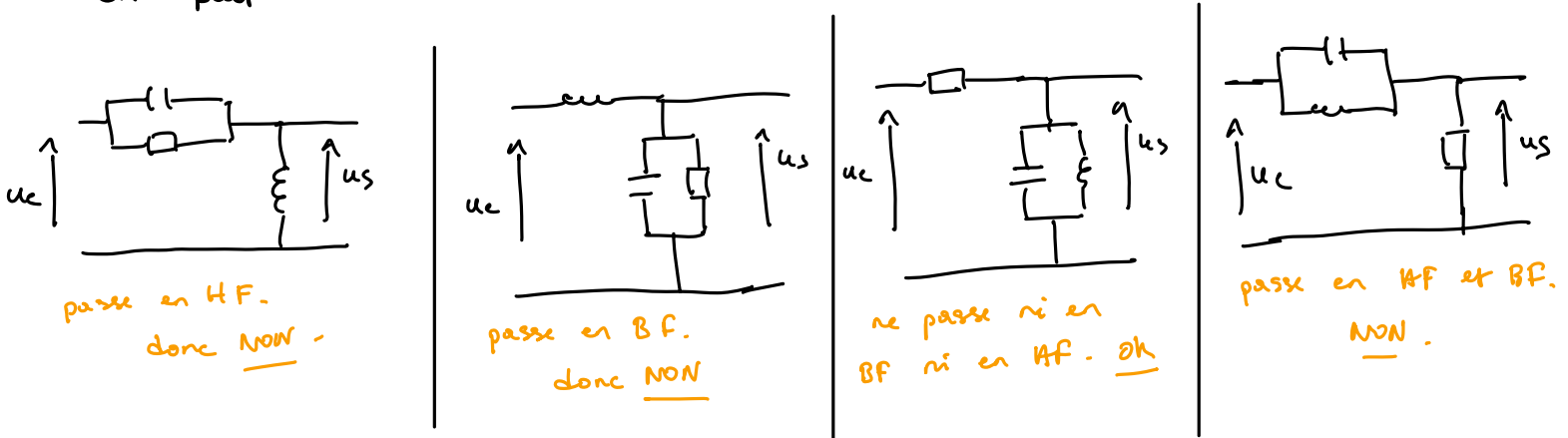
Un quadripôle, constitué de deux dipôles D_1 et D_2 , contient une résistance R , un condensateur C et une bobine L . On réalise les mesures suivantes :

1. On relie l'entrée à une pile de f.e.m. $E_0 = 15 \text{ V}$, la sortie étant ouverte. On mesure un courant $i_0 = 15 \text{ mA}$.
 2. On remplace le générateur continu par un générateur sinusoïdal, et on fait une étude en fréquence de la réponse du système. On observe :
 - Qu'il s'agit d'un filtre passe bande dont le gain passe par une valeur maximale pour la fréquence $f_0 = 1,16 \text{ kHz}$.
 - Que la bande passante à -3 dB vaut $\Delta f = 0,34 \text{ kHz}$.
- Donner le schéma du circuit et les valeurs numériques de ses composants.

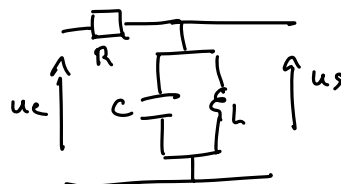


En alimentant l'entrée avec une tension continue, le courant n'est pas nul.
 Or, en régime continu, le condensateur ne laisse pas passer le courant.
 Donc le condensateur est nécessairement en parallèle avec R ou L .

On peut donc avoir ces 4 possibilités. Mais ça doit être passe-bande -



Le circuit est donc



On calcule ensuite les valeurs des composants:

En continu, $U_0 = R I_0$. D'où $R = \frac{U_0}{I_0}$. A.N : $R = 1 \text{ k}\Omega$

La fonction de transfert est : $\underline{H} = \frac{\underline{z_{eq}}}{R + \underline{z_{eq}}}$ avec $\underline{z_{eq}} = \frac{jL\omega / jC\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$

Après calculs, $\underline{H} = \frac{1}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{L}} \left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega} \right)}$

d'où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{R}{L\omega_0}$

On en déduit $L = \frac{R}{Q\omega_0}$ A.N : $L = 40 \text{ mH}$

et $C = \frac{1}{L\omega_0^2}$ A.N : $C = 0,47 \mu\text{F}$

Exercice 8

On considère la tension redressée double alternance $e(t)$ d'amplitude E représentée ci-dessous.

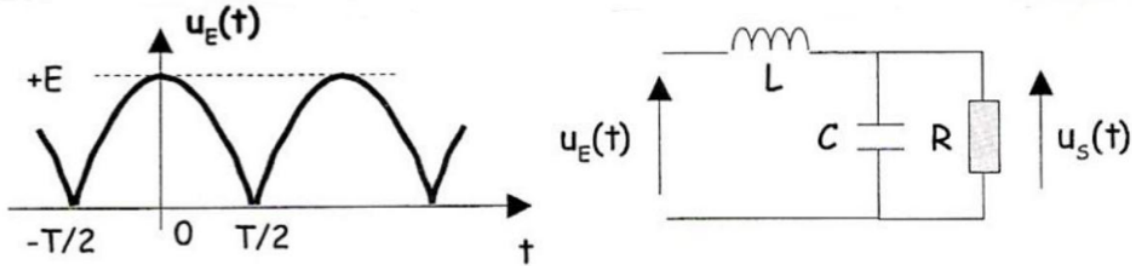
1. Montrer que sa valeur moyenne vaut $2E/\pi$
2. L'amplitude du $n^{ième}$ harmonique est donnée par $C_n = 4E/(\pi(4n^2 - 1))$. Calculer numériquement les amplitudes du fondamental et des 3 premiers harmoniques ($E = 30\text{ V}$ et $T = 10\text{ ms}$).

Donner l'expression numérique de $e(t)$ (en s'arrêtant au 3^{ème} harmonique, et on ne cherchera pas à déterminer les phases).

3. Donner numériquement la fonction de transfert du filtre représenté ci-dessous (avec $R = 100\Omega$; $C = 1\mu\text{F}$ et $L = 1\text{H}$). Préciser sa nature et son ordre.

4. Donner l'expression numérique de la tension de sortie $u_s(t)$ si $e(t)$ est en entrée du filtre (là encore, en omettant les phases).

5. Calculer la valeur efficace de $u_s(t)$.



$$1. e = E |\cos(\omega t)|$$

⚠ $|\cos(\omega t)|$ a une pulsation 2ω , et donc une période $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$
(sa période est 2 fois + petite que celle de $\cos(\omega t)$)

$$\langle e \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E \cos(\omega t) dt = \frac{E}{T} \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{E}{\omega T} \left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right) \right)$$

sur cet intervalle, $|\cos(\omega t)| = \cos(\omega t)$

Donc, $\omega T = \pi$ (cf remarque ci-dessus)

$$\text{Donc } \langle e \rangle = \frac{2E}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{soit } \langle e \rangle = \frac{2E}{\pi} \quad \text{A.N : } \langle e \rangle = 19,1\text{ V.}$$

$$2. C_n = \frac{4E}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$C_1 = 12,7\text{ V}$$

$$C_2 = 2,5\text{ V}$$

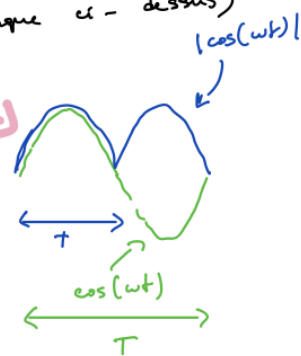
$$C_3 = 1,1\text{ V}$$

$$C_4 = 0,6\text{ V}$$

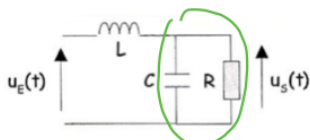
L'expression de e est donc :

$$e = 19,1 + 12,7 \cos(\omega t + \phi_1) + 2,5 \cos(2\omega t + \phi_2) + 1,1 \cos(3\omega t + \phi_3) + 0,6 \cos(4\omega t + \phi_4)$$

(en volts)



3. On utilise le pont diviseur de tension :



$$Z_{eq} = \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{R + j/\omega C}{R + j/\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{u_s} = \frac{Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}} \underline{u_E} \quad \text{d'où } H = \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}}$$

$$= \frac{R}{R + j\omega L(1 + j\omega RC)} = \frac{R}{R + j\omega L - RLC\omega^2}$$

finallement, $\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j \frac{L\omega}{R}}$

numériquement : $\underline{H} = \frac{1}{1 - 10^{-3}\omega^2 + j \cdot 10^{-2}\omega}$

c' est un filtre passe-bas du second ordre

4. $G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega/R)^2}}$

$c'_1 = c_1 \cdot G(\omega) = 2 \text{ V}$

$c'_2 = c_2 \cdot G(2\omega) = 0,2 \text{ V}$

$c'_3 = c_3 \cdot G(3\omega) = 0,06 \text{ V}$

$c'_4 = c_4 \cdot G(4\omega) = 0,023 \text{ V}$

$\langle u_s \rangle = \langle u_c \rangle$ puisque $G(0) = 1$

$u_s = 19,1 + 2 \cos(\omega t + \phi'_1) + 0,2 \cos(2\omega t + \phi'_2) + 0,06 \cos(3\omega t + \phi'_3) + 0,023 \cos(4\omega t + \phi'_4)$ en Volts

5. $U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_s^2 dt} = \langle u_s^2 \rangle$

Les valeurs moyennes des termes croisés sont nulles, donc il reste : on peut le vérifier en détail --

$U_{\text{eff}}^2 = \langle u_s \rangle^2 + c_1'^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_1) \rangle}_{1/2} + c_2'^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_2) \rangle}_{1/2} + c_3'^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_3) \rangle}_{1/2} + c_4'^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi'_4) \rangle}_{1/2}$

Or, la valeur moyenne d'un $\cos^2$ sur une période (ou 2, ou 3 ...) vaut $1/2$.

D'où $U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u_s \rangle^2 + \frac{1}{2} (c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 + c_4'^2)}$

On trouve numériquement $U_{\text{eff}} = 19,2 \text{ V}$ (l'essentiel de la contribution à U_{eff} est due à $\langle u_s \rangle$) -